



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

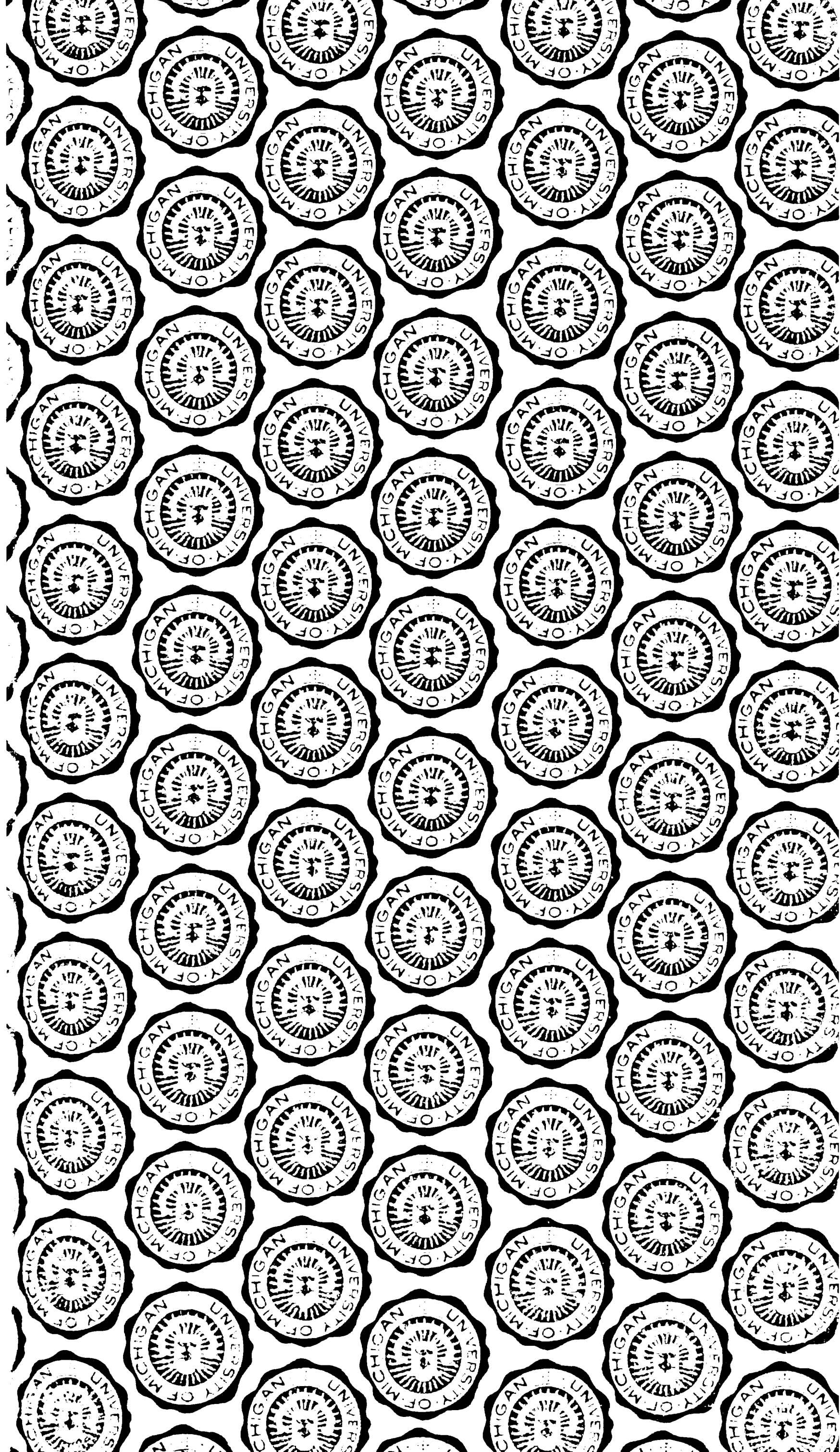
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





Q.7

35

,526

1778

C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES.

T O M E IV.

C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES.

T O M E IV.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,
ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE
EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

—
TOME QUATRIÈME.
—



A PARIS,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du
Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain.

M. DCC. LXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

QA

35

.S26

1715

Hist 254
Baudouin
7-27-27
15430



COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

NOUS avons expliqué dans la section précédente les principes généraux du Calcul Intégral, nous allons maintenant en faire l'application à la Géométrie.

SECTION II.

Des usages du Calcul Intégral dans la Géométrie.

1°. Selon ce qu'on a dit vers le commencement de la section précédente, la différentielle de x^m est $m x^{m-1} dx$ & son intégrale x^m , se trouve en augmentant l'exposant de x d'une unité, & en divisant par dx , & par cet exposant ainsi augmenté, c'est ce que nous appellerons la règle fon-

Tome IV.

A

H. C. M.

7-20-27 V.S.S.

2 COURS DE MATHÉMATIQUES.

damentale. La différentielle de $\frac{y}{x}$ est $\frac{x dy - y dx}{x^2}$

& $S \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{y}{x}, \frac{dx}{x}$ représente la différentielle du logarithme hyperbolique de x , ou la différentielle de $L. x$. de sorte que $S. \frac{dx}{x} = Lx$.

La différentielle de yx est $y dx + x dy$, & $S (y dx + x dy) = yx^* . x$ & y peuvent représenter dans ces formules des variables quelconques, simples ou composées, comme on voudra; donc si une différentielle peut se réduire par substitution à quelqu'une de ces formules générales de différentielles, on en trouvera tout d'un coup l'intégrale, en faisant les mêmes substitutions dans l'intégrale commune de cette formule générale; c'est ainsi qu'en comparant la différentielle $m u^n x^{m-1} dx + n x^m u^{n-1} du$ avec la formule de même espèce $y dx + x dy$, on trouve qu'en substituant u pour y & x^m pour x , elle se réduit à la différentielle proposée **; d'où l'on conclut que faisant les mêmes substitutions dans yx , intégrale de $y dx + x dy$, l'on aura $u^n x^m$. pour l'intégrale de la différentielle proposée: on voit de même que $S. \frac{m u^n . x^{m-1} . dx + n x^m u^{n-1} du}{x^m . u^n} =$

* En relisant les commencemens de la section précédente, on comprendra tout cela facilement.

** Car alors on doit substituer $m x^{m-1} dx$ pour dx & $n u^{n-1} du$ pour dy .

$L. z^m . u^n . *$: car en substituant $z^m . u^n$ au lieu de x , la différentielle $\frac{dx}{x}$ se réduit à la différentielle proposée ; d'où l'on conclut qu'en substituant aussi $z^m . u^n$ au lieu de x dans $L. x$ qui est l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, l'on aura $L. z^m u^n$ pour l'intégrale de la différentielle proposée. Mais ce moyen d'intégration qui est souvent utile, n'est pas toujours facile ; parce qu'on n'a pas de méthode sûre pour les choix des formules & pour les substitutions. Nous donnerons dans la suite d'autres méthodes.

On peut intégrer toute formule dont la quantité hors du signe (qui indique une puissance, ou une racine) est la différentielle de la quantité sous le signe.

Par exemple, l'intégrale de $12 a x^3 . dx \times (b + a x^4)^2$ est $\equiv (b + a x^4)^3$: car en substituant $b + a x^4$ au lieu de x , $m - 1$ au lieu de 2, $4 a x^3 dx$, au lieu de dx , & m au lieu de 3, l'on aura $m x^{m-1} dx$ égal à la différentielle proposée, & $x^m \equiv (b + a x^4)^3$; c'est-à-dire, que dans ce cas on trouve l'intégrale en augmentant l'exposant de la quantité sous le signe d'une unité, & divisant par cet exposant & par la différentielle de la quantité sous le signe.

* L. désigne ici le logarithme hyperbolique.

On peut intégrer algébriquement * ou par logarithmes, toute quantité binome ** de cette forme $a x^m . d x . (b + g . x^n)^p$, toutes les fois que p est un nombre entier positif. Car en élevant le binome à la puissance p , l'on aura un nombre $p + 1$ de termes, qui étant multipliés par $a x^m . d x$ seront tous de cette forme $c x^r . d x$, & seront tous intégrables algébriquement, si l'exposant r est différent de -1 , & par les logarithmes, lorsque cet exposant sera $= -1$. Si $p = 2$, l'on aura $(b + g x^n)^2 = b^2 + 2 b g . x^n + g^2 x^{2n}$. Multipliant chacun des termes de cette quantité par $a x^m d x$, on trouve $a b b x^m d x + 2 b g a x^{m+n} d x + a g g x^{m+2n} d x$. L'intégrale du premier terme est, par la règle fondamentale, $\frac{a b b}{m+1} x^{m+1}$ celle du second terme est $\frac{a b g a}{m+n+1} x^{m+n+1}$. Celle du troisième qui, en faisant $2n + m = r$ & $a g g = c$, devient $c x^r . d x$, sera $\frac{c}{r+1} x^{r+1}$. Si $r = -1$, l'on a $\int c . x^r d x = \int c x^{-1} d x$

* C'est-à-dire, trouver pour intégrale une expression algébrique qui ne contienne ni logarithmes ni suites infinies, ni aucune quantité non algébrique.

** C'est-à-dire, dont la quantité complexe la plus composée est une puissance d'un binome.

$\int c \frac{dx}{x} = c \text{ L. } x$. Si $ag = c = 1$, l'on

aura $\frac{cdx}{x} = \frac{dx}{x}$ & $\int c \frac{dx}{x} = \text{L. } x$. On voit

bien aisément que si la quantité sous le signe étoit un trinome, un quadrinome, ou un polynome quelconque d'un nombre fini des termes & p un nombre entier positif en élevant le polynome à la puissance p & multipliant ensuite chacun des termes par $a x^m : dx$, l'on auroit une différentielle intégrable, puisque chacun des termes de cette différentielle seroit intégrable.

On peut intégrer toute quantité binome dont l'exposant de x hors du binome étant augmenté d'une unité est égal à l'exposant de x dans le binome quelque soit l'exposant p de la quantité sous le signe. Ainsi, si $m = n - 1$,

l'on aura $a x^{n-1} : dx : (b + g x^n)^p$ (A) mais la différence de $b + g x^n$ est $= g n x^{n-1} dx$.

Augmentant d'une unité l'exposant n de la quantité sous le signe, divisant par la différentielle de la même quantité, & par l'exposant ainsi augmenté, l'on aura $\int a x^{n-1} : dx \times$

$$(b + g x^n)^p = \frac{a}{g n \cdot p + 1} \cdot (b + g x^n)^{p+1}$$

En effet, en différentiant cette quantité, l'on trouvera la différentielle A.

On peut intégrer toute différentielle binome dans laquelle l'exposant de la quantité hors du signe étant augmenté d'une unité, est divisible

6 COURS DE MATHÉMATIQUES.

par l'exposant de la quantité sous le signe, & donne un membre entier positif. Soit la différentielle $a x^{m+n-1} . d x . (b + g x^n)^p$. Je

fais $(b + g x^n)^p = z$, ou $b + g x^n = z^{\frac{1}{p}}$,

ou $x^n = \frac{z^{\frac{1}{p}} - b}{g}$; donc $x^{n-1} . d x =$

$\frac{1}{n . g p} . z^{\frac{1}{p}} . d z$ & $x^{m+n-1} = \left(\frac{z^{\frac{1}{p}} - b}{g} \right)^{m+n-1}$.

or, $x^{m+n-1} . d x = x^{m+n-1} \times x^{n-1} . d x$;

donc la différentielle proposée deviendra (A)

$= \frac{a}{n p g^{m+n-1}} . z^{\frac{1}{p}} . d z . (z^{\frac{1}{p}} - b)^{m+n-1}$.

Maintenant si $\frac{m+n-1}{n} = i + \frac{1}{n}$ $\frac{m+n-1}{n}$

$= i + 1$ est un nombre entier, m sera un nombre entier, ou 0; si m est $= 0$, la quan-

tité sous le signe m sera $= 1$, & S. $z^{\frac{1}{p}} . d z$

$= \frac{z^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}$, étant multipliée par le facteur

constant $\frac{a}{n p g}$, donnera l'intégrale cher-

chée exprimée en z , & substituant la valeur

de $z = (b + g x^n)^p$, l'on aura l'intégrale exprimée en x . Si $m = 1$, ou 2, ou 3, &c. l'on aura facilement l'intégrale, parce qu'on pourra toujours élever la quantité sous le signe

m , à la puissance m , & en général puisque $m + 1$ est le quotient de l'exposant de x hors du signe, en augmentant d'une unité, par l'exposant de x sous le signe, toutes les fois que $m + 1$ sera un nombre entier positif, $m + 1 - 1 = m$ sera un nombre entier, ou 0, & la quantité sous le signe m sera ou $= 1$, ou sera réductible à un nombre fini de termes; donc on pourra toujours intégrer toute différentielle binome qui se trouvera dans ce cas. Si $m \cdot n + n - 1 = n - 1$, ou si $m = 0$, l'on aura $x^{n-1} dx$, qui sera la différentielle de la quantité sous le signe à un multiplicateur constant près: donc toutes les fois que la quantité hors du signe est la différentielle de la quantité sous le signe, à un multiplicateur constant près, la différentielle binome est intégrable.

Soit la différentielle $c x^3 dx \cdot (f^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$; Je vois qu'elle est intégrable, parce qu'en augmentant l'exposant 3 de 1, j'ai 4 qui, divisé par 2, donne un nombre entier positif $= 2$.

Faisant donc $(f^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = z$, $ff + x^2 = z^2$, $g = 1$, $b = f^2$, $2 = n$, $\frac{1}{2} = p$, $c = a$, & substituant ces valeurs dans la transformée....(A) ci-dessus, l'on a $\frac{3c}{2} \cdot z^3 dz \times (z^2 - f^2)$; car ici $m + 1 = 2$ & $m = 1$, & négligeant le multiplicateur constant, il vient $S. (z^6 dz - f^2 z^3 dz) = S. z^6 dz - S. f^2 z^3 dz = \frac{z^7}{7} - \frac{f^2}{4} z^4$. Multipliant

cette quantité par $\frac{3c}{2}$, l'on a $\frac{3c}{14} z^7 - \frac{3c}{8} f^2 z^4$
 $= \frac{3c}{14} (f^2 + x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{3cf^2}{8} (f^2 + x^2)^{\frac{4}{2}}$, en
substituant la valeur de z .

Il y a des différentielles qui ne paroissent pas se trouver dans le cas dont on vient de parler, & qui peuvent néanmoins y être ramenées en changeant l'exposant de la variable sous le signe de positif en négatif, ou de négatif en positif. Par exemple, la différentielle

$dx \cdot (b + xx)^{-\frac{3}{2}} = x^0 \cdot dx \cdot (b + x^2)^{-\frac{3}{2}}$
devient en divisant par x^2 dans le binome, & multipliant hors du binome par la quantité x^2 élevée à l'exposant $-\frac{3}{2}$ du signe (voyez le calcul

des radicaux dans la premiere partie de cet ouvrage.) devient, dis-je, $x^{-3} dx \cdot (1 + \frac{b}{xx})^{-\frac{3}{2}}$

$= x^{-3} \cdot dx \cdot (1 + bx^{-2})^{-\frac{3}{2}}$. Maintenant en augmentant -3 d'une unité, l'on a $-3 + 1 = -2$. Mais en divisant -2 par -2 le quotient 1 est un nombre entier positif; donc la différentielle proposée est intégrable.

Si x affectoit les deux termes du binome, il seroit facile de rendre un de ces termes entièrement constant. Par exemple, si l'on avoit $x^3 dx \times (bx + gx^3)^2$, je diviserois les deux termes du binome par x , & je multiplierois la quan-

tité hors du signe par le carré de x , parce que x , sous le signe 2, est égale à x^2 , & j'aurais $x^3 \cdot dx \cdot (b + g x^2)^2$ qui est intégrable, puisque $\frac{5}{2} + 1 = 3$.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle est affectée d'un multiplicateur ou d'un diviseur constant, on peut en intégrant négliger le multiplicateur ou le diviseur, pourvu qu'on le remette ensuite dans l'intégrale.

La différentielle 3. $(adx - xdx) \cdot (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ est intégrable par la règle fondamentale, parce que la quantité hors du signe est la différentielle de la quantité sous le signe, en multipliant cette différentielle par $\frac{2}{3}$; donc en augmentant d'une unité l'exposant $\frac{1}{2}$, & divisant par $\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, & par $2a dx - 2x dx$. (différentielle de la quantité sous le signe), l'on aura l'intégrale cherchée $= (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. En général, quelque soit le polynôme sous le signe, on pourra toujours intégrer par la règle fondamentale, toutes les fois que la quantité hors du signe sera la différentielle de la quantité sous le signe, quand même cette différentielle seroit multipliée ou divisée par une quantité constante. Ces principes supposés, appliquons le Calcul Intégral à la Géométrie. Nous commencerons par les Surfaces.

2. PROBLÈME. Trouver la différence des surfaces des courbes, en supposant les ordonnées perpendiculaires aux abscisses. Soit $AP = x$. $PM = y$, (Fig. 1^{re}.), $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, le rectangle $PpMR$ est $= y dx$,

& le triangle $M m R = \frac{1}{2} dx \cdot dy$; donc le tropeze $P p M m = y dx + \frac{1}{2} dx \cdot dy = y dx$: Car $\frac{1}{2} dx \cdot dy$, infiniment petit du second ordre, disparoit devant $y dx$ infiniment petit du premier; or le tropeze $P M m p$ est l'élément de la surface $A m p$; donc $S. y dx$ est égal à cette surface. Il ne s'agit donc que d'intégrer l'élément $y dx$; pour cela on substituera dans cette formule la valeur de y exprimée par une fonction de x , prise de l'équation de la courbe, comme on va le voir dans les exemples suivans.

Si $A M m$ est une ligne droite, l'on aura l'élément de l'aire d'un triangle.

3. PROBLÈME. *Trouver l'aire d'un triangle $A B C$ (Fig. 2.).* Soit $A D = a$ la hauteur du triangle, la base $B C = b$, l'abscisse $A P = x$, l'ordonnée $M m$ parallèle à la base $= y$; en supposant une autre ordonnée $N n$ infiniment proche l'élément de l'aire sera $= y dx = m n M N$. en faisant $P p = dx$, les triangles semblables $A B C$, $A M m$ ayant leurs hauteurs proportionnelles à leurs bases, l'on a $A D = a : B C = b :: A P = x : M m = y = \frac{bx}{a}$;

donc $y dx = \frac{bx dx}{a}$ & $S. y dx = \frac{bx^2}{2a}$.

Si $A P$ devient $= A D$, l'on aura $x = a$, & l'aire du triangle $= \frac{b a a}{2a} = \frac{b}{2} a$; c'est-

à-dire l'aire d'un triangle est égal au produit de la moitié de la base par la hauteur, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la Géométrie.

4. PROBLEME. Trouver la surface d'une Parabole ordinaire A M. (Fig. 1^{re}.) Par la nature de la courbe, l'on a $y^2 = p x$, $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$;

$$\text{donc } S. y d x = S. p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} d x = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 1}{\frac{1}{2} + 1} \\ \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} y x : \text{c'est-à-dire que l'aire}$$

d'une demie Parabole A M P est égale aux deux tiers du produit de l'ordonnée & de l'abscisse.

COROLLAIRE. Donc l'espace extérieur BAM $= y x - \frac{2}{3} y x = \frac{1}{3} y x$.

5. PROBLEME. Trouver l'espace a. g M P, compris entre deux ordonnées paraboliques. Soit A a $= a$, a g $= b$, a P $= x$, l'élément de cet espace sera $= y d x$; mais à cause de A P $= a + x$, l'on aura $y^2 = p (a + x)$,

$$y = p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{1}{2}} \& S. y d x = S. p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{1}{2}} d x = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{3} (a + x)^{\frac{3}{2}} \text{ (par}$$

la regle fondamentale (1)) $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{3}{2}} x (a + x)$. Nous avons dit, dans la section précédente, qu'il falloit ajouter une constante à l'intégrale. Si nous faisons cette constante $= C$,

l'on aura $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{3}{2}} (a + x) + C$ (B) pour l'intégrale complète. Pour déterminer la constante C, je remarque que lorsque $x = 0$, l'espace a. g. M. P est $= 0$, & dans ce cas l'intégrale B devient $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + C$ qui doit être $= 0$;

donc $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + C = 0$, ou $C = 0 - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$;
donc l'aire cherchée est $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{3}{2}}$
 $- \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$. En effet $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{3}{2}}$ exprime
l'aire entière A P M, tandis qu'on demande cette
aire moins l'aire A g a; or l'aire a g A $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} =$
 $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} a = \frac{2}{3} b. a.$, puisqu'en faisant a A $= x$,
l'on auroit a g $= b = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$.

En général pour trouver la constante C qu'on
doit ajouter à l'intégrale, on fera $x = 0$; si
alors par la nature de la question l'intégrale doit
être $= 0$, & qu'elle soit effectivement $= 0$,
l'on aura $C = 0$; ainsi dans le troisième Pro-
blème l'aire parabolique a été trouvée $= \frac{2}{3} y x$,
qui en faisant $x = 0$, devient $= 0$; donc $C = 0$.

Si l'intégrale doit être $= B$. lorsque $x = 0$, la
constante qu'on doit ajouter, doit rendre cette
intégrale $= B$; c'est-à-dire que si l'intégrale est
 $B + D$, l'on doit avoir $B + D + C = B$, ou
 $D + C = 0$, ou $C = -D$. Si l'on avoit $B - D$
pour intégrale, l'on auroit $B - D + C = B$,
ou $-D + C = 0$, ou $C = +D$; donc la
constante C qu'on doit ajouter, est égale à la dif-
férence de l'intégrale que l'on a dans la supposi-
tion de $x = 0$, avec celle qu'on doit avoir dans
cette même supposition, en prenant cette différence
avec un signe contraire.

Dans l'exemple ci-dessus, lorsque $x = 0$, l'on doit avoir l'intégrale $B = 0$, tandis que l'on a $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$; donc $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$.

Si dans la supposition de $x = b$, l'intégrale devoit être $= B$, & qu'elle fût $= B \pm D$, l'on auroit $B \pm D \mp C = B$, ou $C = \mp D$. Ainsi la constante C se trouve aussi en prenant avec un signe contraire la différence de l'intégrale que l'on a en supposant $x = b$ avec celle que l'on doit avoir dans la même supposition; lorsque C devra être $= 0$, on n'en fera pas mention.

6. PROBLEME. Quarrer * toutes les courbes dont l'équation est $y a^{m-1} = x^m$, & qui peut représenter les paraboles & les hyperboles de tous les genres, entre leurs asymptotes. L'on a y

$$= \frac{x^m}{a^{m-1}}, \text{ S. } y dx = \text{S. } \frac{x^m}{a^{m-1}} \cdot dx =$$

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^{m-1}} \text{ donc s'il s'agit des paraboles, \&}$$

que l'espace commence à l'origine des x , en fai-

$$\text{sant } x=0, \text{ l'on a } \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^{m-1}} = 0, \text{ ce qui}$$

doit être; dans ce cas la constante C est $= 0$. Si m est négatif, ce qui arrive dans les hyper-

* Quarrer & trouver la surface sont ici des termes synonymes.

boles de tous les genres ^{*}, l'on a $\frac{x^{-m+1}}{(m+1)a^{-m+1}}$

$$= \frac{a^{m+1} \cdot x^{-m+1}}{m+1}. \text{ Si } AP = x = 0$$

(Fig. 4.), en supposant $m < 1$, l'aire sera $= 0$. Si l'aire commence au point P, auquel on suppose $x = AP = b$, l'aire PMSR doit s'évanouir,

lorsque $x = b$; donc alors $\frac{a^{m+1} b^{-m+1}}{1-m} + C$

$$= 0, \text{ ou } C = -\frac{a^{m+1} b^{-m+1}}{1-m}, \text{ \& l'aire est}$$

$$\text{alors } = \frac{a^{m+1} \cdot x^{-m+1}}{1-m} - \frac{a^{m+1} b^{-m+1}}{1-m}.$$

On peut remarquer que dans cette hyperbole, l'espace infiniment long ABFM P. situé du côté de l'asymptote AB est fini, & l'espace situé du côté de R est infini. Car en supposant

$x = b$, cet espace est $= \frac{a^{m+1} \cdot b^c}{c}$ (en fai-

sant $1-m=c$) quantité finie; mais en supposant $x = \infty$, cet espace est $= \frac{a^{m+1} \infty^c}{c}$

cela vient de ce que la courbe s'approche plus

^{*} Car alors on a $y \cdot a^{-m-1} = x^{-m}$, ou $\frac{y}{a^{m+1}}$

$= \frac{1}{x^m}$ ou $y \cdot x^m = a^{m+1}$ équation qui peut représenter toutes les hyperboles entre leurs asymptotes.

rapidement de l'asymptote A B que de l'asymptote A R : pour le faire concevoir, supposons

$$a = 1 \text{ \& } m = -\frac{1}{3}, \text{ } m + 1 \text{ sera } = \frac{2}{3} \text{ \& }$$

$$\text{l'équation sera } y \cdot 1 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

donc les ordonnées P M = A D sont en raison

inverse des racines cubes des x , ou de $\sqrt[3]{x}$

donc les D M = A P qui désignent les ordonnées par rapport à l'asymptote A B, sont en raison inverse des cubes des abscisses A D = y . Au contraire s'il s'agit de l'as-

ymptote A R, l'on a P M = $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} L$;

la courbe s'approche donc plus rapidement d'une des asymptotes que de l'autre, & cela arrive aussi dans toutes les hyperboles, excepté l'hyperbole ordinaire.

Si $m > 1$; on pourra exprimer l'intégrale en ajoutant une constante de cette manière;

$$C = \frac{a^{m+1}}{(m-1) \cdot x^{m-1}}. \text{ Si cette intégrale doit}$$

s'évanouir en faisant $x = 0$, l'on aura $C =$

$$\frac{a^{m+1}}{(m-1) \cdot 0^{m-1}} = \infty. \text{ Cela arrive ainsi}$$

parce que l'espace du côté de B est infini. Pour que l'intégration ne soit point frustrée, on supposera une abscisse A P si petite que l'on voudra = b ; & c'est de l'ordonnée correspondante P M, qu'il faut commencer à compter l'espace P M S R; dans ce cas cet espace sera

$\equiv 0$, lorsque $x = b$; donc $C = \frac{a^{m+1}}{(m-1) \cdot b^{m-1}}$,

& l'aire P M S R $= \frac{a^{m+1}}{(m-1)b^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$.

Si $x = \infty$, le dernier terme disparoit, & l'on a l'espace infiniment long P M S R $=$

$\frac{a^{m+1}}{(m-1) \cdot b^{m-1}}$; & parce que en prenant les

abscisses sur une des assymptotes, l'on a dans toutes les hyperboles, excepté les vulgaires; $m < 1$, & en les prenant sur l'autre, l'on a $m > 1$, un des espaces assymptotiques sera fini & l'autre infini, comme on l'a déjà dit.

7. PROBLEME. *Quarrer l'hyperbole équilatère entre ses assymptotes.* Quoiqu'on ait déjà résolu ce probleme, en résolvant le précédent, nous croyons devoir le résoudre d'une autre maniere; soit $y x = a a$ l'équation de la courbe, l'on aura, en faisant $a = 1$, $y x = 1$,

$y = \frac{1}{x}$, S. $y d x = S. \frac{d x}{x} = L. x$, &

ajoutant une constante; l'on a $L. x + C$: pour l'aire B A R S F qui doit être $= 0$, lorsque $x = 0$, donc $C + L \cdot 0 = 0$, ou $C = -L \cdot 0$;

donc l'aire cherchée $= L \cdot x - L \cdot 0 = L \cdot \frac{x}{0}$

(car par la nature des logarithmes, le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende moins celui du diviseur); ainsi en faisant $x = b = A P$, l'espace A P M F B sera infini, en considérant 0 comme une quantité
infiniment

infinitement petite & supposant b finie quoique extrêmement petite.

On peut voir par-là que les logarithmes hyperboliques tirent leur origine d'une hyperbole équilatère dans laquelle la puissance a seroit $= 1$.

8. PROBLEME. Trouver l'aire $P M R S$ comprise entre deux ordonnées asymptotiques $P M$, $R S$. Soit $A P = b$, $P R = x$, $R S = y$, par la nature de l'hyperbole équilatère, en faisant $aa = 1$, l'on a $y \times (b + x) = a^2 = 1$, $y =$

$$\frac{aa}{b+x}, \text{ S. } y dx = \text{S. } \frac{aa dx}{b+x} = aa.$$

$L.(b+x) = L.(b+x) + C$, en ajoutant une constante, & parce que en faisant $x = 0$, l'aire cherchée doit être $= 0$, l'on a $L.b + C = 0$, $C = -L.b$; donc l'aire cherchée est $= L.(b+x) - L.b$. Si $x = b$, l'on aura l'aire cherchée $= L.2b -$

$L.b = L.\frac{2b}{b} = L.2$. Si $x = 3b$, l'on a $L.(b+x) = L.4b - \log.b$, & l'aire $P M R S = L.\frac{4b}{b}$, & en supposant suc-

cessivement $x = b, 3b, 7b$, &c., ou les abscisses $A P = b$, $A R = 2b$, $A r = 4b$, $A t = 8b$, &c. En progression géométrique, les aires $P M S R$, $P M \int r$, &c. ou $L.2$, $L.4$, $L.8$, &c. seront en progression arithmétique*. Et si l'on fait $b = 1$,

* Par la nature des logarithmes, les quantités en progression géométrique, ont leurs logarithmes en progression arithmétique.

l'on aura la progression $L. 1, L. 4, L. 8, \&c. = 0, L. 2, L. 4, L. 8, \&c.$; car $L. 1 = 0$; c'est-à-dire que le logarithme de AP est $= 0$, ou, ce qui revient au même, que les logarithmes hyperboliques commencent au point P , auquel $x = 0$.

Selon ce qu'on a dit dans la première partie de cet ouvrage, le secteur AMS est égal à l'aire $PMRS$; donc on peut prendre les secteurs $MAS, MA \int, \&c.$ pour les aires correspondantes ou pour les logarithmes des abscisses $AR, Ar, \&c.$ De plus, selon ce qu'on a dit dans la première partie de cet ouvrage, (voyez les progressions géométriques) si plusieurs quantités $AP, AR, \&c.$ ou $1, 2, 4, 8, \&c.$ sont en progression géométrique ; leurs différences $PR, Rr, rt, \&c.$ formeront une progression géométrique $\frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8, \&c.$ & les différences $PMRS, RS \int r, \&c.$ des aires, ou les aires correspondantes seront égales ; car $L 2 - 0 = L 2 = L 4 - L 2 = \frac{L 4}{2} = L 2, L 8 - L 4 = L \frac{8}{4} = L 2, \&c.$; donc aussi les secteurs correspondants $MAS, SA \int, \&c.$ seront égaux entr'eux ; mais l'aire $PMRS$ est finie ; donc puisqu'on peut prendre une infinité de lignes $PR, Rr, \&c.$ en progression géométrique, il pourra y avoir une infinité d'aires finies asymptotiques ; donc l'aire entière PM à l'infini sera infinie.

REMARQUE. On peut intégrer $\frac{a \, d x}{b + x} = a \cdot (b + x)^{-1} \cdot d x$, en résolvant $(b + x)^{-1}$.

en une série par la formule de Newton, en

faisant $m = -1$, & l'on aura $\frac{a a d x}{b}$

$$- \frac{a a x d x}{b^2} + \frac{a a x^2 d x}{b^3} -$$

$$\frac{a a x^3 d x}{b^4}, \text{ \&c. dont l'intégrale } = \frac{a a x}{b} -$$

$$\frac{a a x^2}{2 b^2} + \frac{a a x^3}{3 b^3} - \text{\&c.}$$

La solution du Probleme précédent peut servir à faire trouver une logarithmique dont la sous-tangente soit égale à une ligne donnée b .

9. PROBLEME. Décrire la logarithmique dont la sous-tangente $= b$. (Fig. 5.) Je cherche l'aire $P M R S$, en supposant $x = b = 1$ (Fig. 4.), ou je cherche le logarithme hyperbolique de 2, par la méthode du N°. 24. de la section précédente. Je multiplie cette aire qu'on peut du moins avoir aussi approchée que l'on veut par $a a$, & je divise le produit par b . De sorte

que si cette aire est $= c$, on aura $\frac{a a c}{b} = \frac{c}{b}$,

en faisant $a = 1$. Maintenant je fais $A P$ (Fig. 4.) $= b$, & ayant tiré une ligne indéfinie $A R$ (Fig. 5.), sur cette ligne, j'éleve perpendiculairement $A M = b$. Je prends les abscisses $A R$, $A r$, &c. en progression arithmétique, de manière que, l'origine des abscisses étant en A , l'on ait l'abscisse $A R$ égale à l'aire divisée par b , ou $x =$

$$Rr = AR = \frac{c}{b}, \text{ \&c. }^* \text{ ou } Ar = \frac{2c}{b}, \text{ \&c. \&}$$

les ordonnées $AM = b$, $RS = 2b$, $r f = 4b$, &c. en progression géométrique ou égales aux abscisses AP , AR , &c. (Fig. 4.). Cela posé ; il est visible que les abscisses AR , Ar , (Fig. 5.) font les logarithmes des ordonnées correspondantes, & que le logarithme de l'ordonnée $AM = b$ est $= 0$, parce que l'origine des x est au point A . D'autre côté, les logarithmes des ordonnées am plus petites que b , qu'on peut supposer $= 1$, (car l'unité est arbitraire) sont négatifs ; c'est-à-dire que les logarithmes $x = Aa$, (Fig. 5.) pris à la gauche de AM , sont négatifs. De plus, en supposant la sous-tangente $= b$, l'on a, selon ce qu'on a vu section précédente (22), l'intégrale $S. \frac{dy}{y}$ égale au logarithme de y , divisé par la sous-tangente de la logarithmique dans laquelle on prend ce logarithme. En faisant ce logarithme $= x$, l'on aura $\frac{x}{b} = S. \frac{dy}{y}$, ou $x = b S. \frac{dy}{y}$; mais (Fig. 5.) $RS = AR$ (dans la

* En exprimant l'aire c par un nombre, on concevra facilement comment l'on peut avoir $x = \frac{c}{b}$ & même $x = b$.

Fig. 4.) $= b + x$ & $dLy = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{b+x}$;

donc les x (Fig. 5.) sont égaux aux produits de b par les aires hyperboliques $c = S. \frac{dx}{b+x}$ (en supposant $a = 1$) multipliées par b ; donc les $\frac{x}{b}$ sont égales à ces aires , ou sont les logarithmes $S. \frac{dy}{y}$ des ordonnées correspondantes ; donc parce qu'on a dit ci-dessus (section précédente 22.) b est la sous-tangente de la logarithmique dont on vient de parler.

10. PROBLEME. Quarrer la logarithmique de la Figure (5). La sous-tangente de la logarithmique étant constante , l'on a $\frac{y dx}{dy} = b$;

donc $y dx = b dy$, $S y dx = b S dy = b y$; donc en faisant $PN = y$, l'espace infiniment long $PNma$ sera égal au rectangle de PN par la sous-tangente b . Par la même raison , en supposant $RS = z$, l'espace infiniment long $SmRa$ sera $= b \cdot z$; donc l'espace $SRPN = by - bz = b \cdot (y - z)$; c'est-à-dire l'espace logarithmique compris entre deux ordonnées , est égal au produit de la sous-tangente par la différence des ordonnées.

11. PROBLEME. Quarrer la courbe dont l'équation est $y = a + bx + Cx^2 + fx^3$. L'on aura $S. y dx = S. (a dx + b x dx + Cx^2 dx + fx^3 dx)$
 $= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{fx^4}{4}$.

12. PROBLEME. Quarrer la courbe de l'équation $y = a + b x^m + c x^n + D x^f$, m, n, f étant des nombres positifs. L'on aura $S. y dx = S. (a dx + b x^m dx + c x^n dx + D x^f dx)$
 $= ax + \frac{b x^{m+1}}{m+1} + \frac{c x^{n+1}}{n+1} + \frac{D x^{f+1}}{f+1}.$

13. PROBLEME. Quarrer la trajectrice. Si l'on conçoit que l'extrémité T d'un fil, se meut le long d'une ligne infinie BT, (Fig. 6.) tandis que son extrémité M traîne un corps M, ce corps décrira sur un plan horizontal la courbe AM qu'on appelle trajectrice. Pour cette raison cette courbe aura deux branches, car le point T peut se mouvoir également de B vers T, ou de B vers D. De plus, le fil MT que je suppose $= a$, sera partout une tangente de la courbe; ainsi la tangente de cette courbe est constante & $= a$, comme on l'a dit dans la section précédente (34). Il est visible que la plus grande ordonnée AB est $= MT = a$. Qu'on mene les lignes infiniment proches LP, Np, perpendiculaires à la ligne DT, & faisons BP $= FM = y$, LM $= AF = x$, & supposant tirées les lignes que représente la figure, l'on aura Rm $= dy$, MR $= dx$, PM $= a - x$, $\overline{MT} - \overline{PM} = \overline{PT}$, $= aa - (a - x)^2 = 2ax - xx$, ou PT $= \sqrt{2ax - xx}$; mais à cause des triangles semblables PMT, MRm, l'on a $dx : dy :: a - x : \sqrt{2ax - xx}$; ou $dy \cdot (a - x) = dx \cdot \sqrt{2ax - xx}$. Si du centre B avec le rayon a l'on décrit un quart de cercle AD, l'élément Ffn u de

ce quart de cercle , sera $\equiv \int F . f u \equiv dx \sqrt{(2ax - xx)}$,* tandis que l'élément $P p R m$ de la traîtrice est égal à $dy . (a - x)$; donc en faisant $x \equiv a$, l'espace infiniment long $B T m A$, compris entre la traîtrice & son asymptote $B T$ est égal à un quart de cercle dont le rayon est égal à la tangente de la traîtrice.

COROLLAIRE. Si l'on fait $PM \equiv y$, $BP \equiv x$, l'on aura $\overline{MT}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{PT}^2 \equiv aa - yy$, $PT \equiv \sqrt{(aa - yy)}$, $Mm \equiv \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. mais à cause des triangles semblables $M m R$, $M P T$, l'on a $MP . (y) : PT \equiv \sqrt{(aa - yy)} : : - dy^{**} : dx \equiv \frac{- dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$

qui est l'équation de la courbe telle qu'on l'a donnée dans la section précédente (34.)

14. PROBLEME. Quarrer le cercle. Soit ADC un quart de cercle , (Fig. 3.) dont le diamètre $\equiv a$, l'abscisse $AP \equiv x$, & l'ordonnée $PM \equiv y$. Par la nature du cercle , l'on a $y \equiv \sqrt{(ax - xx)}$, S. $y dx \equiv S. dx . \sqrt{(ax - xx)} \equiv S. dx . \sqrt{x} . \sqrt{(a - x)}$. Résolvant $\sqrt{(a - x)} \equiv (a - x)^{\frac{1}{2}}$

* car l'ordonnée de ce quart de cercle est $\equiv \sqrt{(2ax - xx)}$.
 ** dy a le signe - parce y diminue lorsque x augmente. Si l'on fait mouvoir le point T vers la gauche en allant de B vers D , on décrira une autre branche égale & semblable à la première. Si , parce que PT est située à la gauche de PM , on vouloit prendre le radical avec le signe - , le second membre de l'équation auroit le signe +.

en une série par le binome de Newton , & multipliant tous les termes de la série par $x^{\frac{1}{2}} dx$,

l'on aura $dx \cdot \sqrt{(ax - xx)} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx -$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2 a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8 a^{\frac{3}{2}}} - , \&c. = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx -$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{1.2 a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{1.2.4 a^{\frac{3}{2}}} - \&c. \text{ dont l'intégrale } =$$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5 a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1. x^{\frac{7}{2}}}{4.7. a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3 x^{\frac{9}{2}}}{4.6.9 a^{\frac{7}{2}}}$$

$$- \frac{1.3.5. x^{\frac{11}{2}}}{4.6.8.11 a^{\frac{9}{2}}} , \&c. \text{ Si l'on fait } x = \frac{1}{2} a ,$$

l'on aura le quart de cercle A D C , dont le quadruple donnera le cercle entier ; si le diamètre étoit $2 a$, l'on auroit $S y dx = S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$.

AUTRE MANIERE. Si l'on fait le rayon $= a$, & que l'on compte les abscisses C P du centre , l'on aura $y = \sqrt{(aa - xx)}$ & $S. y dx = S. dx \sqrt{(aa - xx)} =$ C D P M ; résolvant en série $\sqrt{(aa - xx)}$ multipliant par dx , & intégrant , il vient $S. dx \cdot$

$$\sqrt{(aa - xx)} = ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{x^5}{2.4.5 a^3} - \frac{1.3 x^7}{2.4.6.7 a^5} - , \&c.$$

Si l'on fait C P $=$ C A $= a$, l'on aura le quart de cercle C D A $= aa - \frac{aa}{2.3} - \frac{1. a^2}{2.4.5} , \&c.$

AUTREMENT. Soit la tangente $At = x$; ayant mené les sécantes Ct , CT infiniment proches, & du centre C décrit l'arc ts , qu'on pourra regarder comme une ligne droite perpendiculaire sur CT , l'on aura $tT = dx$ & les triangles $Tt\int$, CTA , ou CtA (car les angles CTA , CtA peuvent être regardés comme égaux) feront semblables, aussi bien que les triangles Cts , Cri ; donc en faisant $AC = a$, l'on aura $Ct = \sqrt{(aa + xx)} : CA = a :: Tt = dx : ts = \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} : l'on \text{ aura aussi } Ct : Ci ::$

$$ts : ri, \text{ ou } \sqrt{(a^2 + x^2)} : a :: \frac{a dx}{\sqrt{(aa + xx)}} :$$

$$ri = \frac{a^2 dx}{aa + xx} = a^2 dx \cdot (aa + xx)^{-1} :$$

Multipliant cette quantité par $\frac{Cr}{2} = \frac{a}{2}$, l'on aura le secteur élémentaire $Cir = \frac{dx}{2} a^3 \times (aa + xx)^{-1}$. Résolvant en série $(aa + xx)^{-1}$, multipliant tous les termes par $\frac{dx}{2} a^3$, on trouve le

$$\text{secteur } CAr = S. \frac{a^3 dx}{2 (aa + xx)} = \frac{ax}{2}$$

$$- \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10 \cdot a^3} - \frac{x^7}{14 \cdot a^5}, \text{ \&c. Si l'on fait } AT = a ; \text{ c'est-à-dire, si l'arc } Ar \text{ est}$$

de 45° . *, l'on aura le secteur $C A r = \frac{a a}{2}$

$\frac{a a}{6} + \frac{a a}{10} + \frac{a a}{14} + \frac{a a}{18}$, &c ; & en multipliant tous les termes par 8, l'on aura l'aire du cercle entier.

15. PROBLEME. *Quarrer la cicloïde.* (Fig. 7). Soit $P n = y$, l'on aura $i r = n s = dy$, & faisant le diamètre $D C$ du cercle générateur $= a$, $D P = x$, l'on aura $P M = \sqrt{(a x - x x)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, (section précédente 13), la corde $D M$ est parallèle à la tangente $T n$ de la cicloïde ; donc les triangles $D M P$, $n i s$ ** sont semblables & donnent $D P : P M :: n r = P p = dx : r i = n s$, ou $x : \sqrt{(a x - x x)} ::$

$dx : n s = \frac{dx \sqrt{(a x - x x)}}{x}$. Si l'on mul-

tiplie $n s$ par $L n = x$, l'on aura l'élément $L n s f$ de l'espace extérieur $A F D = dx \sqrt{(a x - x x)}$; or cet élément est celui d'un demi-cercle dont le diamètre $= a$; donc l'espace extérieur $A F D$ est égal au demi-cercle générateur ; mais l'espace entier $A F D C$ est égal au produit de $A C$ par $D C$, ou de la demi-circonférence du cercle générateur par son diamètre, ou est $= a . b$, en faisant la demi-circonférence du cercle générateur $= b$, tandis que le demi-cercle générateur est $= \frac{a . b}{4}$;

* La tangente de 45° . est égale au rayon, comme on l'a dit dans la Trigonométrie.

** On peut regarder l'arc $n i$ comme le prolongement de la tangente $T n$.

donc l'espace cicloïdal $A D C = \frac{3}{4} \cdot a \cdot b$; c'est-à-dire , la demi cicloïde $A D C$ est triple du demi-cercle générateur , & la cicloïde entiere est triple du cercle générateur * ,

16. PROBLEME. *Quarrer la Cissoïde.* (Fig. 8). Par la nature de cette courbe en faisant le diametre

du cercle générateur $= 2 a$, l'on a $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

$= \frac{x^3}{1-x}$, en supposant $2 a = 1$, $y =$

$x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, S. $y d x =$ S. $x^{\frac{1}{2}} \times$

$(1-x)^{-\frac{1}{2}} d x$. Élevant $1-x$ à la puissance $-\frac{1}{2}$; multipliant ensuite tous les termes de la série ré-

sultante par $x^{\frac{3}{2}} d x$, l'on aura S. $\frac{d x \cdot x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} =$

$x^{\frac{1}{2}} (\frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 9} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 11} x^5 , \&c$

* Si l'on compte les ordonnées depuis le diametre du cercle générateur , les ordonnées $P s = D L$ étant $= y$,

& $n s = d y$, on aura $L n = x$ & $d y = \frac{d x \sqrt{(a x - x x)}}{x}$,

ou $d x = \frac{d z \sqrt{(2 a z - z z)}}{z}$, en changeant y en x , &

en z & faisant de plus le diametre du cercle générateur $= 2 a$. Nous ferons usage de cette équation au N° 304. de la Section troisieme.

AUTREMENT. Supposons $AB = a$, $AP = x$,
 $PM = y$, l'on aura $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, ou ay^2
 $= y^2 \cdot x = x^3$, $2ay dy = 2xy dy$
 $= y^2 dx = 3x^2 dx$, $2dy \cdot (a-x) = y dx =$
 $\frac{3xx dx}{y}$; mais en supposant $PN = u$, l'on a
par la nature de la courbe $PM : PA :: PA : PN =$
 $u = \frac{x^2}{y}$, & supposant de plus $PB = a - x = z$,
on aura $2 \cdot z dy = y dx = 3u dx$, & $2S. z dy$
 $= S. y dx = 3S. u dx$. Mais $u dx = PN \cdot Pp$,
est l'élément du demi-cercle ANB , $z dy =$
 $BP \cdot dy = Bp \cdot dy = mR \cdot fm$, est l'élément
de l'aire $AmBR$, & $y dx = PM \cdot Pp$, est l'élé-
ment de l'aire $AMD B$, & quand $S. z dy$ exprime
l'aire entiere $ABRm$, comprise entre l'asymptote
& la branche Am , $S. y dx$ exprime aussi cette
aire, & alors $S. z dy = S. y dx$; donc alors $2S. z dy$
 $= S. y dx = 3S. u dx$, devient $S. z dy = 3S. u dx$.
Mais $S. u dx$ exprime le demi-cercle ANB ;
donc l'espace entier $AmBR$ est triple du demi-
cercle générateur, & l'espace entier $SAmRF$ est
triple du cercle générateur.

17. PROBLEME. Quarrer la courbe exponen-
tielle dont l'équation est $y = x^x$. Selon ce qu'on
a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, (cour-
bes algébriques 47.) si le logarithme hyperbolique
d'un nombre est $= p$, ce nombre sera $= 1 + p$

$$+ \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2 \cdot 3} + \frac{p^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{p^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$$

Le logarithme hyperbolique de x^x étant $= x L x$
 $= L y$; je substitue $x L x$ au lieu de p dans cette sé-

rie, pour avoir $1 + x L x + \frac{x^2 (L x)^2}{2} +$

$\frac{x^3 (L x)^3}{2 \cdot 3} + \&c. = x^x = y, S y d x = S x^x d x$

$= S. (d x + x L x . d x + \frac{x^2 \overline{L x}^2 d x}{2} +$

$\frac{x^3 \overline{L x}^3 d x}{2 \cdot 3} + \&c.)$. On prendra les intégrales de

chaque terme, en négligeant les diviseurs de ceux qui en ont en cette manière.

$$S. d x = x$$

$$S. x . L . x . d x = \frac{1}{2} x^2 \overline{L x} - \frac{1}{2^2} x^2$$

$$S. x^2 \overline{L x}^2 d x = \frac{1}{3} x^3 \overline{L x}^2 - \frac{2}{3^2} x^3 L x + \frac{2}{3^3} x^3$$

$$S. x^3 \overline{L x}^3 d x = \frac{1}{4} x^4 \overline{L x}^3 - \frac{3}{4^2} x^4 \overline{L x}^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot x^4 L x}{4^3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot x^4}{4^4}$$

$$S. x^4 \overline{L x}^4 d x = \frac{1}{5} x^5 \overline{L x}^4 - \frac{4}{5^2} x^5 \overline{L x}^3 + \frac{3 \cdot 4 \cdot x^5 \overline{L x}^2}{5^3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^5 L x}{5^4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 x^5}{5^5}$$

La loi de la progression est facile à concevoir, & l'on peut facilement l'appliquer aux autres termes. Si l'on différencie une de ces intégrales, l'on trouvera la différentielle correspondante : Par

exemple, en différentiant $\frac{1}{2} x^2 \text{ L. } x - \frac{1}{2^2} x^2$, l'on

aura, en faisant varier successivement x & $\text{L. } x$,
 $\frac{1}{2} x dx \text{ L. } x + \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} - \frac{2x dx}{2^2} = x \text{ L. } x dx +$

$\frac{1}{2} x dx - \frac{1}{2} x dx = x \text{ L. } x dx$ *, & ainsi des autres. En substituant les valeurs des intégrales, & ne négligeant pas les diviseurs qu'ont les termes avant l'intégration, l'on aura :

* Car $2^2 = 4$ & $\frac{2x dx}{2^2} = \frac{2}{4} x dx = \frac{1}{2} x dx$.

CALCUL INTEGRAL.

$$S. y dx = S. x^n dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} x^2 L. x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 L. x + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 L. x + \frac{1 \cdot x^5 L. x}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \&c. \\ -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 L. x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 L. x - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} x^5 L. x, \&c. \\ + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 L. x + \frac{1}{2 \cdot 5} x^5 L. x, \&c. \\ -\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 L. x, \&c. \\ + \frac{1}{5} x^5, \&c. \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Cette formule représente l'aire cherchée. Si l'on fait $x = 1$, alors $L. x = 0$, & il ne reste que les termes qui, dans les séries horizontales, occupent le premier rang; donc l'aire de la courbe comprise entre deux ordonnées, dont l'une répond à $x = 0$,

& l'autre à $x = 1$, sera $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^7}$, &c. Cette série

est si convergente que le dixième terme $\frac{1}{10^{10}}$

est seulement $= \frac{1}{10,000,000,000}$.

18. REMARQUE. L'on peut voir par-là que

$$S. x^m (L. x)^m dx = \left(\frac{1}{m+1} x^{m+1} L. x \right)^m -$$

$$\frac{m}{(m+1)^2} x^{m+1} (L. x)^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1)}{(m+1)^3} \times$$

$$x^{m+1} (L. x)^{m-2} - \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{(m+1)^4} \times$$

$$x^{m+1} (L. x)^{m-3} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot m \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{(m+1)^5} \times$$

$x^{m+1} (L. x)^{m-4} + \&c.$ La série finit au terme auquel l'exposant de $L. x = 0$; car les termes suivans devant être multipliés par cet exposant, seront tous $= 0$. Pour se convaincre que c'est-là l'intégrale de $x^m L. x^m dx$, l'on n'a qu'à la comparer avec la cinquième ci-dessus, en faisant $m = 4$.

Si $m = 1$, l'intégrale sera $= \frac{1}{2} x^2 \cdot (L. x) - \frac{1}{4} x^2$,
l'intégrale

l'intégrale $S. \frac{dx}{x(Lx)^m}$ est $= \frac{1}{1-m} Lx^{1-m}$. Car en différentiant cette dernière quantité & supposant $Lx=z$, l'on aura $\frac{1}{1-m} \times (1-m) z^{1-m-1} dz = z^{-m} dz = \frac{dx}{x(Lx)^m}$, puisque $dz = dLx = \frac{dx}{x}$. Si $m = -1$, cette intégrale sera $\frac{1}{2} (Lx)^2$;

on pourra donc employer dans ce cas cette formule, au lieu de la série précédente dont tous les termes deviennent infinis lorsque $m \rightarrow 1 = 0$. Enfin si m est négative ou fractionnaire, l'on n'aura $S. x^m (Lx)^m dx$ que par une série infinie, excepté le cas dans lequel $m = -1$.

19. PROBLEME. Quarrer l'ellipse. L'équation à l'ellipse en faisant le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, fera $y^2 = \frac{b}{a} \frac{b}{a} (aa - xx)$,

en comptant les abscisses CP (Fig. 9.) depuis le centre, & faisant $PM = y$; donc l'élément de l'espace $CDMP$ est $= y dx = \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa - xx)}$, & $S. y dx = \frac{b}{a} S. dx \sqrt{(aa - xx)}$. Or

$S. dx \sqrt{(aa - xx)}$ est égale à l'aire $CFmP$ qui appartient au quart de cercle CFA , dont le rayon $= a$; donc l'aire de l'ellipse est à celle d'un cercle décrit sur son grand axe pris pour dia-

mettre, comme $\frac{b}{a} S. dx \sqrt{(aa - xx)} : S. dx$.

$\sqrt{(aa - xx)} : \frac{b}{a} : 1 :: b : a$; c'est-à-dire, comme le petit demi-axe est au demi-grand axe.

Si l'on compte les abscisses du sommet A, l'aire AMP sera $= \frac{b}{a} S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$; or $S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$ est égale au demi segment circulaire A P m; donc en intégrant $dx \sqrt{(2ax - xx)}$, l'on aura par les séries ce demi-segment circulaire qui deviendra égal au demi-cercle en supposant dans l'intégrale $x = 2a$, & multipliant cette intégrale par $\frac{b}{a}$, l'on aura l'aire d'une demi-ellipse; or on peut intégrer $dx \sqrt{(2ax - xx)} = dx \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2a - x)}$, en réduisant $\sqrt{(2a - x)} = (2a - x)^{\frac{1}{2}}$, en une série infinie par la formule $(a + b)^m$, en substituant $2a$ au lieu de a , ou si l'on veut en substituant c au lieu de a , & $-x$ au lieu de b , multipliant tous les termes par $dx \cdot x^{\frac{1}{2}}$ & intégrant.

REMARQUE. Si l'on décrit un cercle d'un rayon $= \sqrt{(a \cdot b)}$, ou d'un rayon moyen proportionnel géométrique entre le demi-grand axe & le demi-petit axe, ce cercle sera au cercle dont le rayon $= a$, comme $a \cdot b : a \cdot a$ (par ce que les cercles sont dans les rapports des quarrés des rayons) $:: b : a$.

Mais on vient de voir que l'ellipse étoit au cercle décrit sur son grand axe, comme $b : a$; donc en faisant $= S$, l'aire de l'ellipse, B étant l'aire du cercle dont le rayon $= \sqrt{a \cdot b}$, A; l'aire du cercle dont le rayon $= a$, l'on aura $S : A :: b : a$ & $B : A :: b : a$; donc $S : A :: B : A$; ou, *alternando*, $S : B :: A : A$. Donc $S = B$; c'est-à-dire, que l'aire d'une ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le demi-petit axe & le demi-grand axe.

Si l'on vouloit quarrer l'ellipse par le moyen de

l'élément du secteur CDi ; après avoir mené la tangente BT , l'ordonnée IH , & décrit du centre C les arcs infiniment petits fR , fi , l'on feroit $CH = x$, $Hi = y$; donc $Ci = \sqrt{yy + xx}$ $= Cf$, (car fi est infiniment petite.); mais à cause des triangles semblables CHi , CBT , l'on

$$a x : y :: a : BT = \frac{ay}{x}, \text{ \& } x : a :: Ci \Rightarrow \sqrt{yy + xx} : CT = Ci^* = \frac{a \sqrt{yy + xx}}{x}.$$

Mais l'abscisse x croissant $BT = \frac{ay}{x}$ diminue, aussi bien que y ; donc la différentielle Tt de BT sera $= -\frac{ax dy + ay dx}{xx}$; mais à cause des triangles

semblables Tfi , TBC , l'on a $CT : CB :: Tt : fi$, ou $\frac{a \sqrt{yy + xx}}{x} : a :: \frac{-ax dy + ay dx}{xx}$;

$fi = \frac{-ax dy + ay dx}{x \sqrt{yy + xx}}$; mais les secteurs semblables Ctf , CRf^{**} donnent $Ct : fi :: Cf : fR$, ou $\frac{a \sqrt{yy + xx}}{x} : \frac{-ax dy + ay dx}{x \sqrt{yy + xx}} ::$

$$\sqrt{yy + xx} : fR = \frac{-x dy + y dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

* Ct est censée égale à CT , les points T & t étant infiniment proches.

** Le secteurs semblables sont ceux dont les arcs mesurent des angles égaux.

Multipliant $f R$ par $\frac{Cf}{2}$ l'on aura le secteur élémentaire $f C R = \frac{-x dy + y dx}{2}$. Mais par la nature de l'ellipse $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$, $dy = \frac{-bx dx}{a \sqrt{(aa - xx)}}$; donc en substituant ces valeurs, l'on aura le secteur $CfR = \frac{bx^2 dx}{2a \sqrt{(aa - xx)}} + \frac{b dx}{2a} \times \sqrt{(aa - xx)} =$ (en réduisant au même dénominateur) $\frac{bx^2 dx + aab dx - bxx dx}{2a \cdot \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{ab dx}{2 \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{ab}{2} dx \cdot (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Résolvant $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ en série; multipliant ensuite tous les termes de la série par $\frac{a \cdot b}{2} dx$, & intégrant, l'on aura $S. \frac{ab dx}{2 \cdot \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80 \cdot a^4} + \frac{5bx^7}{224 \cdot a^6} + \&c.$ Si l'on suppose $x = a$, l'on aura le quart de l'ellipse $CDB = \frac{ba}{2} + \frac{ba}{12} + \frac{3ba}{80} + \frac{5ba}{224} + \&c.$ dont le quadruple donnera l'aire entière de l'ellipse.

20. PROBLÈME. Soit supposée la circonférence AHB (Fig. 10.) d'un quart de cercle étendue

en une ligne droite ab , dans laquelle en supposant les abscisses ah égales aux arcs AH , les ordonnées correspondantes hm soient égales aux sinus MH de ces arcs, on demande la surface abc , de la courbe amc , qu'on appelle courbe de sinus. Soit le rayon $CA = a$, l'arc $AH = ah = x$, le sinus MH de cet arc $= hm = y$; ayant mené les lignes HP , ID perpendiculaires sur CB & tiré les rayons CH , CI , l'on aura $\overline{HP} = aa - yy = \overline{CH} - \overline{CP} = \overline{CH} - \overline{HM}$; & $HP = \sqrt{(aa - yy)}$, & la différentielle Ho , en supposant l'arc HI infiniment petit, sera $= \frac{y dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, qu'on prend

avec un signe contraire, parce que l'arc croissant aussi bien que son sinus, HP diminue. Les triangles CID , HIo , ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables; donc $CD = y$; $CI = a$; $Ho = \frac{y dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$; $HI =$

$dx = hr = \frac{a dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$; donc l'élément $hrmn$ $= \frac{ay dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, dont l'intégrale ou l'aire ahm $= S. ay dy . (aa - yy)^{-\frac{1}{2}} = -a\sqrt{(aa - yy)}$ $+ C$. Pour déterminer la constante C , je fais $y = 0$; dans ce cas l'on doit avoir $ahm = 0$; donc $-a\sqrt{aa} + C = 0$, ou $C = +a\sqrt{aa} = aa$; donc l'intégrale complète est $aa - a\sqrt{(aa - yy)}$. Si l'on fait $y = a = bc$, l'on a l'aire entière abc $= aa - a\sqrt{0} = aa = ACBF$ quarré de a .

21. PROBLÈME. Quarrer l'hyperbole AG , rapportée à ses axes. (Fig. 11.). Soit le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $= CB = b$. Par la nature de la courbe, en comptant les x depuis le sommet A , l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + xx)$

& si l'on fait $b = a$; c'est-à-dire, si l'hyperbole est supposée équilatere, l'on aura $S. y dx = S. dx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$; tandis que l'aire $S. y dx$ de l'hyperbole non équilatere sera $\frac{a}{b} S. dx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$;

donc si l'on a l'aire de l'hyperbole équilatere, & qu'on la multiplie par $\frac{b}{a}$, il en résultera l'aire de l'hyperbole non équilatere. Pour avoir l'aire de l'hyperbole équilatere, on réduira $(2a + x)^{\frac{1}{2}}$ en série, en faisant pour simplifier $2a = c$; multipliant ensuite tous les termes par $x^{\frac{1}{2}} dx$, & intégrant, l'on trouvera, toute réduction faite, $S. y dx = S. dx$.

$$\sqrt{cx + xx} = \sqrt{cx} \left(\frac{1}{2}x + \frac{x^2}{4a} - \frac{x^3}{4 \cdot 7 a^2} + \frac{1 \cdot 3 x^4}{4 \cdot 6 \cdot 9 a^3} - \&c. \right), \text{ en remettant la}$$

valeur de c . En multipliant cette série par $\frac{b}{a}$, l'on auroit l'aire d'une hyperbole non équilatere.

Si l'on compte les x depuis le centre C , l'élément de l'aire de notre hyperbole supposée équilatere sera $= dx \sqrt{xx - aa}$, parce que dans ce cas $y = \sqrt{xx - aa}$. Si l'on vouloit l'élément de l'aire

AGHC, l'on auroit $HG = CP = x$, & $HC = GP = y$; mais l'équation seroit $y^2 = xx - aa$, ou $x^2 = yy + aa$; si l'on fait $CH = PG = x$, & $CP = HG = y$, l'on aura $yy = xx + aa$, $y = GH = \sqrt{xx + aa}$, $y dx = dx \cdot \sqrt{xx + aa}$, & l'aire cherchée = $S. dx \sqrt{xx + aa}$. Si l'on fait $GP = y$, l'équation $GH = \sqrt{xx + aa}$ donne $GH = \sqrt{yy + aa}$, parce que x se change en y ; donc Pp différentielle de $CP = GH$ devient

$$= \frac{y dy}{\sqrt{yy + aa}}. \text{ Multipliant } Pp \text{ par } GP,$$

l'on a la différentielle de l'aire $AGP =$

$$\frac{yy dy}{\sqrt{yy + aa}}. \text{ Si l'on vouloit avoir l'aire}$$

$CAGH$ exprimée par l'ordonnée HG au second axe, en faisant $HG = y$, l'on auroit $CH = GP$

$$= x^2 = y^2 - a^2, CH = \sqrt{yy - aa},$$

$$\text{la différentielle } HD = \frac{y dy}{\sqrt{yy - aa}}, \text{ \&}$$

$$\text{l'élément } DHGg = \frac{yy dy}{\sqrt{yy - aa}}$$

Comparons ces élémens de l'aire de l'hyperbole équilatère, avec ceux de l'aire du cercle. En faisant le rayon du cercle $= a$, (Fig. 3.) & $AP = x$, l'élément de l'aire circulaire sera $= dx \cdot \sqrt{2ax - xx} = dx \cdot \sqrt{ax - xx}$ (en faisant le diamètre $= a$). Mais l'aire sera $= S. dx \cdot \sqrt{aa - xx}$, le rayon étant $= a$, & l'origine des x étant au centre. Tout cela suit ce qu'on a dit ci-dessus (14).

Si l'on fait $CH = x = \sqrt{aa - yy}$, $Hi = y$, $rl = dy$, il $= Hh = \pm dx$ (les signes \pm

ou — ont lieu selon que x va en augmentant ou en diminuant), les triangles CHi , ril (semblables parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires) donnent $\sqrt{(aa - yy)} : y :: dy : \pm dx = \frac{y dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$. Mais parce que y diminue lorsque x augmente, l'élément $y dx$ de l'espace $CDiH$, fera $= \frac{-yy dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$. S'il s'agit au contraire de l'espace AHi , son élément est $= -dx \cdot y = \frac{yy dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, parce que dans le premier cas dy a le signe — & le signe + dans le second.

L'on peut aussi comparer les secteurs circulaires & les arcs circulaires avec les secteurs hyperboliques, qui, selon ce qu'on a dit ci-dessus, peuvent être regardés comme les logarithmes des abscisses correspondantes; donc les secteurs correspondans à des abscisses en progression géométrique, sont en progression arithmétique. Si l'on divise ces secteurs par la moitié du demi-axe, ils seront encore en progression arithmétique, & nous appellerons *logarithmes hyperboliques d'une dimension*, ou *logarithmes hyperboliques simples*, ces secteurs ainsi divisés.

Selon ce qu'on a dit ci-dessus (14) en faisant la tangente AT (Fig. 3.), $= x$, & le rayon du cercle $= a$, le secteur Cir est $= \frac{a^2 dx}{2 \cdot (aa + xx)}$. Mais le secteur résulte de l'arc ir multiplié par la moitié $\frac{a}{2}$ du rayon. Donc en divisant ce secteur élémentaire par $\frac{a}{2}$ l'on a $\frac{a^2 dx}{aa + xx}$ pour l'élé-

ment de l'arc $A r$, & l'arc $A r$ est $= S. \frac{a^2 dx}{aa + xx}$.

A cause des triangles $CH i$, $r i l$ (Fig. 3.), semblables, parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires, l'on aura $r i : i l = H h : C i : i H$, ou en faisant $A H = x$, $H h = dx$, $r i : dx :: a :$

$\sqrt{(2ax - xx)}$, ou $r i = \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$

& $S. \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = A i D$. Si l'on prend

les abscisses du centre C , l'on aura $H h = l i = -dx$: donc $i r : -dx :: a : \sqrt{(aa - xx)}$

& $r i = \frac{-a dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$. De même l'on a $i r :$

$rl :: C i : CH$. C'est pourquoi en faisant $i H = y$, l'on a $rl = dy$, $CH = \sqrt{(aa - yy)}$; donc

$i r : dy :: a : \sqrt{(aa - yy)}$, ou $i r = \frac{a dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$.

Les triangles semblables $T i f$, CTA & les secteurs semblables Cir , Cft , donnent $i r : t f :: C i = CA : Ct$. & $ft : fT :: CA : tA$, ou $ft = \frac{CA \cdot fT}{tA}$. Substituant cette valeur au lieu

de ft , l'on a $i r : \frac{CA \cdot fT}{tA} :: CA : Ct$, ou $i r :$

$CA :: \frac{CA \cdot fT}{tA} : Ct :: fT : \frac{Ct \cdot tA}{CA}$; donc

$i r : fT :: CA : \frac{Ct \cdot tA}{CA} :: CA^2 : Ct \cdot tA$.

ou $ir : f T :: \overline{CA}^2 : Ct . t A$; donc en faisant la sécante , $Ct = f$, l'on a $ir : df = f T :: aa : f . \sqrt{(ff - aa)}$: car alors $t A = \sqrt{(ff - aa)}$,

ou $ir = \frac{a^2 df}{f . \sqrt{(ff - aa)}}$. Si l'on multiplie la

valeur de ir par $\frac{a}{2}$, l'on aura le secteur élémentaire

$Cir = \frac{a^3 df}{2 . f . \sqrt{(f^2 - aa)}}$. Si l'on fait

la co-tangente $= x$, l'élément ir de l'arc AD sera

$= \frac{-a^2 dx}{aa + xx}$, & le secteur Cir considéré comme

l'élément du secteur CAi fera $= \frac{-a^3 dx}{2 . (aa + xx)}$,

parce que l'arc Ai augmentant , la co-tangente diminue , & si l'on fait la co-sécante $= f$, l'on aura les mêmes formules que l'on vient de trouver en employant la sécante , mais elles seront affectées du signe $-$, parce que la co-sécante diminue lorsque l'arc augmente.

Soit l'hyperbole équilatère AM (Fig. 12.) dont le centre soit C , le demi - axe $AC = a$, que nous appellerons le sinus total ou le rayon par analogie au cercle , l'abscisse $CP =$ le co-sinus , l'ordonnée $PM =$ le sinus & l'abscisse $AP =$ le sinus versé.

Si l'on fait $AP = x$, l'on aura $CP = a + x$, $PM = \sqrt{(2ax + xx)}$. Donc le triangle CMP

$= \frac{(a + x) \sqrt{(2ax + xx)}}{2}$. Le secteur CAM

est égal à ce triangle , moins le demi - segment

A. M P ; donc l'élément du secteur est égal à l'élément du triangle , moins l'élément du secteur.

demi-segment

L'élément du demi-segment A M P est $\equiv dx \sqrt{(2ax + xx)}$, celui du triangle est $\frac{dx \cdot \sqrt{(2ax + xx)}}{2} + \frac{(a + x)}{2} \times$

$\frac{dx \cdot (a + x)}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, d'où retranchant $dx \sqrt{(2ax + xx)}$,

il reste $dx \frac{aa + 2ax + xx}{2 \sqrt{(2ax + xx)}} - 2dx \frac{\sqrt{(2ax + xx)}}{2}$

$\equiv \frac{aa dx}{2 \sqrt{(2ax + xx)}}$; donc le secteur CMA est

$\equiv S. \frac{aa dx}{2 \sqrt{(2ax + xx)}}$, & le logarithme

hyperbolique simple exprimé par le Sinus verse

fera $\equiv S. \frac{a dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$. Si l'on fait le

co-sinus CP $\equiv x$, l'on aura PM $\equiv \sqrt{(xx - aa)}$, &

le triangle CMP fera $\equiv x \frac{\sqrt{(xx - aa)}}{2}$. Si l'on

différencie cette quantité & qu'on en retranche $dx \sqrt{(xx - aa)}$, qui dans ce cas exprime la différentielle du demi-segment A P M, l'on aura

l'élément du secteur CAM $\equiv \frac{aa dx}{2 \sqrt{(xx - aa)}}$

ce secteur fera $\equiv S. \frac{aa dx}{2 \sqrt{(xx - aa)}}$, & le loga-

rithme hyperbolique simple exprimé par le co-sinus

fera $\equiv S. \frac{a dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Supposons le

sinus $PM \equiv y$: en comptant les abscisses $x \equiv CP$ du centre, l'on aura $y^2 \equiv x^2 - aa$, ou $x^2 \equiv aa + yy$, ou $x \equiv CP \equiv \sqrt{(aa + yy)}$;

donc la différentielle Pp fera $\equiv \frac{y dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$.

Multipliant cette différentielle par y , l'on a l'élément du demi-segment $\equiv \frac{y y dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$;

& le triangle CMP est alors $\equiv \frac{y \cdot \sqrt{(aa + yy)}}{2}$.

Si l'on en prend la différentielle, & qu'on en retranche celle du demi-segment, l'on aura le secteur

$\equiv S. \frac{aa dy}{2 \sqrt{(aa + yy)}}$; & le logarithme hyperbolique simple exprimé par le sinus sera

$\equiv S. \frac{a dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$.

Si du point A l'on tire AF parallèle au second demi-axe CB , on appellera cette ligne tangente hyperbolique. Il s'agit d'exprimer le secteur hyperbolique par la tangente AF que nous ferons $\equiv t$.

En faisant le co-sinus $CP \equiv x$, le sinus $PM \equiv y$, les triangles semblables CAF , CPM donneront $x : y :: a : t$, $x^2 : y^2 :: aa : t^2$, & (dividendo) $x^2 - y^2 \equiv aa^* : y^2 :: aa - t^2 : t^2$; donc y^2

* De l'équation à l'hyperbole équilatère $y^2 \equiv x^2 - aa$, l'on tire aisément $x^2 - yy \equiv aa$.

$$= \frac{a a t^2}{a a - t^2}, \& a a + y^2 = a a + \frac{a^2 t^2}{a a - t^2}$$

$$= \frac{a^4}{a^2 - t^2}, \sqrt{(a a + y y)} = \frac{a^2}{\sqrt{(a a - t^2)}}$$

De plus l'équation $y^2 = \frac{a a t^2}{a a - t^2}$ donne $y =$

$$\frac{a t}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}; \text{ donc } d y = \frac{a d t}{\sqrt{(a a - t^2)}} +$$

$$\frac{a t^2 d t}{(a a - t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^3 d t}{(a a - t^2)^{\frac{3}{2}}}; \text{ substituant}$$

les valeurs de $d y$ & de $\sqrt{(a a + y y)}$ dans

$$S. \frac{a^2 d y}{2 \sqrt{(a a + y y)}}, \& \text{ dans } S. \frac{a d y}{\sqrt{(a a + y y)}}$$

$$= S. \frac{a d y}{(a a + y y)^{\frac{3}{2}}}, \text{ l'on aura le secteur } =$$

$$S. \frac{a^3 d t}{2 \cdot (a a - t^2)}, \& \text{ le logarithme hyper-$$

$$\text{bolique simple } = S. \frac{a^2 d t}{a a - t^2}.$$

Si de l'extrémité B du second demi-axe, l'on tire B D parallèlement au premier axe, jusques à la rencontre de C M prolongée, s'il le faut, nous appellerons B D co-tangente hyperbolique. Si l'on fait cette co-tangente $= z$, les triangles rectangles CAF, C B D ayant les angles aigus BDC, ACF.

* On prend la différentielle en faisant varier successivement t & $\frac{a}{\sqrt{(a a - t^2)}} = a (a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}.$

alternes internes, sont semblables; donc $t : a :: a : z$
 $z = \frac{aa}{t}$, & $t = \frac{aa}{z}$, $dt = -\frac{a^2 dz}{z^2}$, & $aa - t^2$
 $= aa - \frac{a^4}{z^2} = \frac{aa}{z^2} \cdot (z^2 - aa)$; donc
 $\frac{dt}{aa - t^2} = -\frac{dz}{zz - aa}$; donc le secteur CAM
 $= S. \frac{a^2 dz}{2 \cdot (aa - t^2)}$ sera $= S. \frac{-a^2 dz}{2 \cdot (zz - aa)}$, & le
logarithme hyperbolique simple sera $= S. \frac{-aadz}{zz - aa}$

Si l'on réduit $\frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}} = a(aa - yy)^{-\frac{1}{2}}$ en
une série infinie, en élevant $(aa - yy)$ à la puissance
 $-\frac{1}{2}$ par le binome de Newton, qu'on multiplie tous
les termes de la série résultante de cette opération
par a & par dy , & qu'on intègre, l'on aura (Fig. 3.)

l'arc circulaire Ar $= S. \frac{ady}{\sqrt{(aa - yy)}} = y +$

$$\frac{y^3}{2 \cdot 3 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot y^5}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y^7}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^6}$$

+ &c. Cette série est utile pour trouver les arcs
qui ne sont pas plus grands qu'un quart de cercle.
Si l'on fait $y = a$, l'on a l'arc de 90° .

$$a \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11} \right) \text{ \&c.)}$$

(A). L'on a le logarithme hyperbolique simple =

$$S. \frac{a dy}{\sqrt{(aa + yy)}} = y - \frac{y^3}{2 \cdot 3 a^2} + \&c. (B).$$

C'est la même série que la précédente, excepté que les termes de celle-ci ont les signes $+$ & $-$ alternativement. Si l'on fait $y = a$, & que l'on change les signes des termes de rang pair de la série A, l'on aura le logarithme hyperbolique simple, correspondant à $y = a$. Nous ferons ce logarithme $= D$. Si l'on suppose $y > a$, la série B sera divergente; dans ce cas on élèvera $aa + yy$ à la puissance $-\frac{1}{2}$ en prenant yy pour le premier terme, ou l'on élèvera $yy + aa$, à la puissance $-\frac{1}{2}$, & l'on

$$\begin{aligned} \text{aura } S. \frac{a dy}{\sqrt{(yy + aa)}} &= a.L.y + \frac{a^3}{2 \cdot 2 \cdot y^2} \\ &- \frac{1 \cdot 3 a^5}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot y^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^7}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot y^6} - \\ &\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^9}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot y^8} + \&c + C. \end{aligned}$$

Quoiqu'en faisant $y = 0$, le secteur CAM doive être égal à 0, aussi bien que la série qui exprime le logarithme hyperbolique simple, néanmoins cette supposition seroit inutile pour déterminer la constante C, parce que dans ce cas tous les termes de la série deviennent infinis. Mais on a dit ci-dessus que le logarithme hyperbolique simple correspondant à $y = a$ étoit $= D$; on fera donc $y = a$ & l'on égalera la série que nous venons de trouver, avec la série B, dans laquelle on mettra a au lieu de y , & l'on

$$\text{aura } a.L.a + C + \frac{a}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3 a}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4} +$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} \&c. = D = a \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5} \right) \&c. \text{ ou } C = a \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5} \right) \&c. \\ - a L. a - a \left(+ \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4} \&c. \right) \\ = - a L. a - a + \frac{(2 + 3) \cdot a}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \\ \frac{(4 + 5) \cdot 1 \cdot 3 \cdot a}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{(6 + 7) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7} \&c.$$

en réduisant les termes; donc $S. \frac{a \, d \, y}{\sqrt{(y y - a a)}} =$

$$a \cdot L. y - a \cdot L. a - a + \frac{(2 + 3) a}{2 \cdot 2 \cdot 3} \&c. + \frac{a^3}{2 \cdot 2 \cdot y^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot a^5}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot y^4} + \&c. \text{ En multi-}$$

pliant la série par $\frac{a}{2}$, l'on aura le secteur hyperbolique correspondant à y .

Nous avons dit ci-dessus qu'en faisant le co-sinus $= x$, le logarithme hyperbolique simple

étoit $= S. \frac{a \, d \, x}{\sqrt{(x x - a a)}}$. Si l'on change x en y ,

ce logarithme sera $= S. \frac{a \, d \, y}{\sqrt{(y y - a a)}}$. Si l'on fait

$AP = S. \frac{a \, d \, y}{\sqrt{(y y - a a)}}$, $AB = a$ & que l'on

décrive la courbe Bm (Fig. 13.) en prenant toujours l'ordonnée égale au co-sinus hyperbolique y , l'abscisse

cisse $AP = x$ étant égale au logarithme hyperbolique simple, l'on aura $x = S. \frac{a dy}{\sqrt{yy - aa}}$, $d x = \frac{a dy}{\sqrt{yy - aa}}$. C'est l'équation de la ligne des co-sinus hyperboliques*. Si l'on fait $AP = x = S. \frac{a dy}{\sqrt{aa + yy}}$, en prenant PM égale au sinus hyperbolique (supposé $= y$), l'on aura $dx = \frac{a dy}{\sqrt{aa + yy}}$, & la courbe AM dont les abscisses sont égales aux logarithmes hyperboliques simples, & les ordonnées PM aux sinus correspondans est appelée ligne des sinus hyperboliques.

Au reste par logarithme hyperbolique simple, on entend ceux qu'on trouve en divisant les secteurs hyperboliques d'une hyperbole équilatère dont le demi-axe $= a$ par $\frac{a}{2}$.

22. REMARQUE I. Si l'on fait $AF = y$, $Fn = x$, l'on aura FB (fig. 1.) $= dy$, l'élément $B F M n = x dy$ & $S x dy$ fera l'espace ABM . Soit $y^2 = ax$ l'équation de la parabole, l'on aura $x = \frac{y^2}{a}$, $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Donc $S. x dy$ fera $= S. \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2} + 1} dx =$

* Si l'on change x en p , & y en q , l'on a $dp = \frac{a dq}{\sqrt{qq - aa}}$ qui est l'équation que nous avons trouvée section précédente (108) pour la développée de la trajectrice.

$$\frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + 2}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3} y x; \text{ c'est-}$$

à-dire, que l'espace extérieur A B M de la parabole est égal au tiers du rectangle de l'ordonnée in , & de l'abscisse $F n = A i$.

REMARQUE. II. Si l'angle des ordonnées & des abscisses n'étoit pas droit, si cet angle M P N étoit $= u$ (Fig. 14.) dans ce cas le parallélograme P p M n qu'on peut regarder comme l'élément de l'aire A M P seroit égal au produit de P p $= d x$ par la hauteur M N de ce parallélograme. Pour trouver M N, je remarque que dans le triangle rectangle M N P, en faisant M P $= y$, & le sinus total $= r$, l'on a $r : y :: \sin u : M N = \frac{\sin u \cdot y}{r}$; donc en substituant cette valeur au lieu

de y , l'élément de l'aire sera $= \frac{\sin u \cdot y}{r} \cdot d x$,

& l'aire A M P $= S. \frac{\sin u \cdot y d x}{r} = \frac{\sin u}{r} \times$

$S. y d x$. Il suffira donc de chercher l'aire comme si les ordonnées étoient perpendiculaires aux abscis-

ses, & de la multiplier ensuite par $\frac{\sin u}{r}$, le

produit donnera l'aire cherchée.

On a trouvé ci-dessus (4) l'aire parabolique A M P (Fig. 1.) $= \frac{2}{3} x y$, en supposant l'angle des ordonnées & des abscisses, droit. Si l'angle M P p étoit tel que l'on eût $\frac{\sin u}{r} = \frac{1}{3}$, cette aire seroit

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} x y = \frac{2}{9} x y$.

23. Si les ordonnées partent d'un point C (Fig. 15.) on décrira du centre C avec le rayon $CB = y$, l'arc $Bn = dx$ entre les rayons infiniment proches BC , bC , & l'on pourra regarder le secteur CBn comme égal au triangle CBb ; or le secteur $CBn = \frac{y dx}{2}$; donc $S. \frac{y dx}{2} =$ & $S. y dx$ fera la formule de quadrature dans ce cas-là. Pour intégrer $\frac{1}{2} y dx$, l'on substituera dans cette formule la valeur de dx donnée en y & dy ; & l'on doit remarquer que dx étant un arc décrit d'un rayon variable y , on ne sauroit avoir son intégrale.

Soit le rayon $CA = a$, je décris un cercle avec le rayon a , & je fais l'arc variable de ce cercle $AM = z$, $Mm = dz$, les arcs Bn , Mm étant décrits du même centre entre les côtés d'un même angle C, les secteurs BCn , MCm , sont semblables; donc $CB : CM :: Bn : Mm$, ou $y : a :: dx : dz$; donc $dx = \frac{y dz}{a}$; donc $\frac{1}{2} S. y dx = \frac{1}{2} S. \frac{y^2 dz}{a}$. On pourra substituer dans cette formule la valeur de dz en y & dy , & l'intégrer ensuite.

24. PROBLÈME. Trouver la quadrature de la spirale d'Archimède, dans laquelle en supposant le rayon du cercle générateur $= r$, la circonférence $= c$, l'on a l'équation $cy = rr = ax$, n faisant $r = a$. Pour employer la formule que l'on vient de trouver, nous substituerons z à x , ce qu'on peut faire, parce que x désigne dans l'équation de la courbe, un arc de cercle décrit d'un rayon constant, & nous

aurons $cy = az$, $adz = cdy$, $dz = \frac{c}{a} dy$.
 Substituant cette valeur de dz dans la formule
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{a} dz$, l'on a $\frac{c}{2a^2} \cdot y^2 dy$, pour la valeur du sec-
 teur $C B n$ (Fig. 16.); donc $\frac{c}{2aa}$ $S. y^2 dy$ est
 égale à l'espace $C f B$ compris entre l'arc $C f B$ & le
 rayon $C B$. Or $S. y^2 dy = \frac{y^3}{3}$; donc cet espace est
 $= \frac{c}{6} \cdot \frac{y^3}{a^2}$, & si l'on fait le rayon $C B = a = CA$,
 l'espace entier de la spirale d'Archimede CBA fera
 $= \frac{c}{6} \cdot \frac{a^3}{a^2} = \frac{c \cdot a}{6}$; c'est-à-dire, que la surface
 de la spirale d'Archimede est égale au sixieme du
 rectangle de la circonférence & du rayon. Or la
 surface du cercle générateur est $= \frac{c \cdot a}{2}$; donc l'aire
 de la spirale est à la surface du cercle générateur
 comme $\frac{c \cdot a}{6} : \frac{c \cdot a}{2} :: \frac{1}{6} : \frac{1}{2} :: 2 : 6 :: 1 : 3$.

25. PROBLÈME. *Quarrer les spirales repré-
 sentées par l'équation $c^n y^m = r^n x^n = a^n z^n$, en
 faisant $r = a$ & $x = z$, comme dans le Problème
 précédent. L'on aura $a^n z^n = c^n y^m$, $z^n = \frac{c^n}{a^n} \cdot$*

y^m , $z = \frac{c}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot y^{\frac{m}{n}}$, en prenant la racine n de

part & d'autre ; $dz = \frac{\frac{m}{n} \cdot c \cdot y^{\frac{m}{n}-1} dy}{a^{\frac{m}{n}}}$,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 dz}{a} = \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+1} dy, \text{ dont}$$

$$\text{l'intégrale est} = \frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+2} *$$

Si l'on suppose $y = a$, cette intégrale devient

$$\frac{n}{(m+2n)} \times \frac{m}{2n} c a^{\frac{m}{n}+2} = \frac{m}{2} - 1 \quad (\text{en}$$

retranchant l'exposant $\frac{m}{n} + 1$ de l'exposant $\frac{m}{n}$

$$+ 2) = \frac{m \cdot a c}{2m + 4n}. \text{ Si } m = n = 1, \text{ l'on}$$

a $\frac{1}{2} a \cdot c$. Si $m = 3$, & $n = 5$, l'on a $\frac{3 a c}{26}$, c'est

à-dire $\frac{3}{26}$ du rectangle de la circonférence & du rayon du cercle générateur ; en général on aura

$$\text{la surface} = \frac{m}{2m + 4n} \cdot \frac{c y^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}.$$

REMARQUE. Si l'on suppose que le rayon Ca soit $= 2a = 2CA$ dans la spirale d'Archimede, c'est-à-dire, si l'on suppose que le point décrivant

* L'exposant $\frac{m}{n} + 1$ étant augmenté d'une unité de-

vient $= \frac{m}{n} + 2 = \frac{m + 2n}{n}$, & diviser par cette frac-

tion, c'est multiplier par $\frac{n}{m + 2n}$.

B se meuve uniformément sur le rayon Ca , de maniere qu'après la premiere révolution du rayon autour de C, ce point se trouve en A, & qu'après la seconde révolution il se trouve en a, l'in-

tégrale $\frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \frac{c y^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}$, devient ==

$$\frac{m}{2m+4n} \cdot \frac{c}{a^2} y^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{aa} y^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{ac}{3} =$$

$\frac{1}{6} ac$, lorsque $y = 2a$. Si l'on veut avoir l'espace renfermé entre la seconde spire & le cercle générateur, voici comme il faut s'y prendre.

Je fais la variable $Mg = y$; donc $Cg = a + y$; Faisant $Mm = dz$, & du point C décrivant l'arc gL , les secteurs semblables CMm , CgL donneront $a:dz:a+y:gL = \frac{(a+y)}{a} dz$.

$$\text{Le trapèze } MmLg \text{ est } = \frac{(Mm + gL) Mg}{2} \\ = \frac{(ay + y^2) dz}{2a} + \frac{y dz}{2}; \text{ mais par la}$$

nature de la courbe, $az = cy$, $dz = \frac{c}{a} dy$; donc

$$\text{l'élément de l'espace cherché est } = \frac{c}{a} \times \\ \left(\frac{ay dy + y^2 dy}{2a} + \frac{y dy}{2} \right), \text{ dont l'inté-}$$

$$\text{grale est } = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4}}{2a} \right), \text{ Si } y$$

$= 0$, l'intégrale est $= 0$, comme cela doit être ; ainsi il n'y a point de constante à ajouter. Si l'on

fait $y = a$, l'intégrale devient $= \frac{c}{a} \times$

$$\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{4} \right) = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5 a a}{12} + \frac{a a}{4} \right)$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5 a a + 3 a a}{12} \right) = c a \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \cdot c a$$

$$= \frac{4 c a}{6} ; \text{ mais l'espace renfermé dans la pre-}$$

miere spire est $= \frac{1}{6} a c$; c'est-à-dire est égal au tiers du cercle générateur & par conséquent l'espace renfermé entre la circonférence du cercle générateur & la première spire, est les deux tiers

du cercle générateur, ou est $= \frac{2 a c}{6}$; donc

l'espace renfermé entre les deux spires est $= \frac{6}{6} a c = a c$, ou double du cercle géné-

rateur, & la surface comprise entre le centre C & la seconde spire est $= \frac{7}{6} a c$; donc la surface $\frac{1}{6} a c$

renferme d'abord la surface $\frac{1}{6} a c$ de la première spire, plus la surface de la seconde, d'où l'on peut conclure que lorsque l'intégrale répond à une spire qui en renferme plusieurs autres, les surfaces des spires intérieures sont comprises dans l'intégrale de

manière que s'il s'agit de la troisième spire toute entière, la surface exprimée par l'intégrale $\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{a}$.

$\frac{y^3}{3}$, qui dans ce cas devient $= \frac{27}{6} a c$ (parce que alors $y = 3 a$), renferme la surface com-

prise entre le centre C & la troisième spire ; plus la surface comprise entre la seconde spire & le centre, plus la surface comprise entre la première spire & le centre. En effet si l'on cherche la surface comprise entre la troisième spire & un cercle dont le rayon seroit $= 2a$, on trouvera par une méthode semblable à celle que l'on vient de mettre en usage pour la seconde spire, que cette surface est $= \frac{7}{6}ac$, & comme le cercle dont le rayon est $2a$, est $= 2ac$, (ou quadruple du cercle générateur $\frac{1}{2}ac$) $= \frac{12ac}{6}$, l'espace compris entre la troisième spire & le centre sera $= \frac{12}{6}ac$; donc l'intégrale $\frac{27}{6}ac$ contient encore $\frac{7}{6}ac + \frac{12}{6}ac$, ou l'espace compris entre la seconde spire &

le centre, c'est-à-dire la surface de la seconde spire, plus la surface de la première spire & ainsi de suite ; de sorte que l'intégrale qui répondra à une spire du rang n , contiendra, outre la surface de cette spire comprise entre le centre & cette spire, contiendra dis-je, la somme des surfaces de toutes les spires renfermées dans la plus grande qui est celle du rang n . Si l'on fait attention qu'après la première révolution ce rayon variable CB a parcouru la surface de la première spire, que dans la seconde révolution ce rayon parcourt la surface de la seconde spire, &c. On pourra concevoir pourquoi l'intégrale qui répond à la cinquième spire, par exemple, renferme non-seulement la surface de la cinquième spire, mais encore la somme des surfaces de la 4^e, 3^e, 2^e, 1^e spires. Il est bon de bien remarquer cela pour ne pas tomber dans l'erreur, en s'imaginant que la surface renfermée entre la

courbe $agABC$ & la ligne Aa , par exemple, est $\frac{8ac}{6}$, tandis qu'elle est seulement $\frac{7}{6}ac^*$.

Mais, dira-t-on, comment donc trouver la surface comprise entre le centre & une spire quelconque, par exemple, la quatrième? L'on n'a qu'à prendre l'intégrale en supposant $y = 4a$, & l'on aura $\frac{64ac}{6}$; on prendra aussi l'intégrale en supposant $y = 3a$, c'est-à-dire, l'intégrale qui répond à une spire d'un rang immédiatement inférieure, l'on aura $\frac{27ac}{6}$; on retranchera cette

intégrale de la première, le reste $\frac{37ac}{6}$ donnera la surface de la 4^e spire, ce qui est évident.

26. PROBLÈME. Soit supposée AB (Fig. 15.) une courbe rapportée au foyer C telle que son équation soit $Bn = dx = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{a}}$ dont on demande l'aire. En substituant la valeur de dx dans la formule $\frac{1}{2} \cdot S. y dx$, l'on aura $\frac{1}{2} \cdot S. y dx$

$= \frac{1}{2} \cdot S. \frac{y^{\frac{3}{2}} dy}{\sqrt{a}} = \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \cdot \sqrt{a}} + C$. Si l'aire doit s'évanouir en faisant $y = CA = a$, l'on aura $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \cdot a^{\frac{1}{2}}} + C = 0$, ou $C = -\frac{a^2}{5}$; telle est

* S'il s'agit de la surface de la troisième spire, on doit entendre, 1^o. La surface de la première, plus l'aire comprise entre la 1^e & la 2^e; plus l'aire comprise entre la 2^e & la 3^e. C'est la somme de ces aires qui forme la surface de la 3^e spire. On comprend par-là ce que c'est que la surface de la 4^e, 5^e, &c. spire.

la valeur de la constante C dans ce cas , & l'inté-

grale complete fera $\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot \sqrt{a}} - \frac{a^2}{5}$, pourvu que y ne réponde qu'à une seule spire tout au plus en comptant depuis le point auquel répond $y = a$, autrement il faut avoir égard à la remarque du N°. précédent.

27. PROBLÈME. Quarrer la spirale de l'équation $dx = \frac{dy \sqrt{yy - bb}}{b} = \frac{dy \sqrt{yy - aa}}{a}$,

en faisant $b = a$. Supposons que la courbe AB (Fig. 15.) soit celle de l'équation ; ce sera donc , comme il suit de ce qu'on a dit dans la section précédente (106), la développante d'un cercle dont le rayon $= a$. Substituant la valeur de dx dans $\frac{1}{2} y dx$, & intégrant , l'on aura l'aire

$$ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(yy - aa)^{\frac{3}{2}}}{a} = \frac{1}{3a} (yy - aa)^{\frac{3}{2}};$$

cette aire devient $= 0$, lorsque $y = a$, comme cela doit être ; ainsi je n'ajoute point de constante.

Pour trouver l'espace compris entre la courbe & la circonférence du cercle , il suffit de retrancher de l'intégrale ci-dessus le secteur circulaire correspondant CAM .

On peut aussi s'y prendre de la maniere suivante : ayant tiré les rayons osculateurs infiniment proches, Bs , bp , qui étant des tangentes du cercle , sont perpendiculaires aux rayons Cs , Cp ; si l'on conçoit que le point p s'écarte du point s , de maniere que Cp fasse un angle infiniment petit avec Cs , la ligne bp fera un angle égal avec Bs prolongée s'il le faut. Maintenant faisant $As = Bs = z$, $sp = dz$, & regardant l'arc

Bb comme un petit arc circulaire, les secteurs Bpb , & Cp , seront semblables, & l'on aura $Cs = a$; $sp = dz$; $Bs = bp = z$; $Bb = \frac{z dz}{a}$. Multipliant cette valeur par $\frac{z}{2}$, l'on

a le secteur élémentaire $b p B = \frac{1}{2a} z^2 dz$, &

en intégrant l'espace $A : B$ sera $= \frac{1}{6a} z^3$. On

n'ajoute point de constante, parce que lorsque $z = 0$, l'intégrale est $= 0$. Si l'on fait $z = c$, l'espace entier compris entre la circonférence c du

cercle & la branche entière AB sera $= \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{a}$.

Mais la surface du cercle est $= \frac{a \cdot c}{2}$; donc cette

surface est à celle qu'on vient de trouver comme

$\frac{a \cdot c}{2} : \frac{c^3}{6a} :: a : \frac{c^2}{3a} :: 3aa : c^2$; c'est-à-dire, comme

le triple du carré du rayon au carré de la circonférence.

REMARQUE. Si l'on développoit le cercle en allant de A en R , on auroit une autre courbe AL qui ne différeroit de la première que par sa position.

28. PROBLÈME. Quarrer la spirale hyperbolique représentée par l'équation $yz = ac$. (Fig. 17.)

On aura $z = \frac{a \cdot c}{y} = ac y^{-1}$, $dz = -a \cdot x$

$\cdot y^{-2} \cdot -dy$. (car z augmentant y diminue) $=$

$ac y^{-2} dy$. Maintenant si l'on fait $y : dx :: a : dz$,

l'on aura $dx = \frac{y dz}{a}$, & la formule $\frac{1}{2} \cdot y dx$ de-

viendra $= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{a} \cdot dz = \frac{1}{2a} \times ac y^2 y^{-2} \cdot dy$

(en substituant la valeur de $d z$ qu'on vient de trouver) $= \frac{c \cdot d y}{2}$; or $S. \frac{c \cdot d y}{2}$ est $= \frac{1}{2} c y$; donc si c est supposée représenter la circonférence d'un cercle dont le rayon est $= a$, la surface de la spirale hyperbolique sera la moitié du produit de cette circonférence par le rayon de la spirale ; & si $y = a$, la surface correspondante sera égale au cercle générateur. On comprend ici non-seulement la surface comprise entre le centre & la spire qui est terminée au point auquel répond le rayon a , mais encore la somme des surfaces des spires intérieures. Si l'on suppose $y = \frac{1}{2} a$, en retranchant $\frac{1}{4} a c$ de $\frac{1}{2} a c$, on aura $\frac{1}{4} a c$, qui (selon la remarque du N°. 25.) sera la surface comprise entre le centre & la spire , à l'extrémité de laquelle aboutit le rayon $y = a$.

29. PROBLÈME. *Quarrer la spirale logarithmique , que je supposerai représentée par la* (Fig. 17.). L'angle $C M T$ que fait le rayon avec la courbe ou la tangente étant constant , nous ferons la tangente de cet angle $= a$; donc en supposant le sinus total $= 1$, le triangle rectangle $M n m$ donnera $1 : m n :: a : M n$, ou $1 : d y : a : d x = a d y$. Substituant cette valeur de $d x$ dans la formule $\frac{1}{2} y d x$, l'on aura $\frac{1}{2} S. y d x = \frac{1}{2} S. a y d y = \frac{1}{4} . a y^2$. Maintenant si l'on suppose tirée la tangente $T M$ & la sous-tangente $C T$, le triangle rectangle $M C T$, donne $1 : C M :: a : C T$, ou $1 : y :: a : C T = \frac{a y}{1} = a y$; & si l'on multiplie $C T = a y$, par $\frac{y}{2}$,

l'on aura l'aire du triangle M C T $= \frac{a y^2}{2}$,

donc ce triangle est double de l'aire comprise entre la courbe & le rayon C M.

Mais selon la remarque du N°. 25, il faudra en retrancher l'intégrale qui répond à l'ordonnée de la spire précédente.

DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

30. *Rectifier une courbe c'est trouver une ligne droite égale à cette courbe.*

Soit A M (Fig. 1^{re}.) une courbe quelconque dans laquelle les ordonnées soient perpendiculaires aux abscisses A P $= x$. Si l'on fait l'arc A M $= s$, l'arc infiniment petit M m sera $= ds$; or le triangle rectangle M m R donne M m $= ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; il ne s'agit donc plus que d'intégrer $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; pour cela, on cherchera la valeur de dx ou celle de dy , qu'on substituera à la place de dx ou de dy , & ensuite l'on intégrera.

31. PROBLÈME. *Rectifier le cercle.* En comptant les abscisses du sommet (Fig. 3.), l'on aura $y =$

$$\sqrt{(2ax - xx)}, \quad dy = \frac{a dx - x dx}{\sqrt{(2ax - xx)}},$$

$$dy^2 = dx^2 \cdot \frac{(a - x)^2}{2ax - xx}.$$

Substituant cette

valeur de dy^2 dans $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura

$$\sqrt{(dx^2 + \frac{dx^2 \cdot (a - x)^2}{2ax - xx})} = \frac{\sqrt{a} dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

$$= \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = a dx \cdot (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}.$$

Résolvant $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$, en une série infinie par la méthode ordinaire *, multipliant ensuite tous les termes par $a dx$ & intégrant l'on

$$\text{aura l'arc } s = AM = (2ax)^{\frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 3 \cdot (2a)^{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 5 (2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^{\frac{7}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2a)^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Si l'on fait $x = AC = a$, l'on aura la valeur d'un arc de 90° . dont le quadruple donnera la longueur entière de la circonférence.

Si l'on veut compter les abscisses' du centre C, en faisant $CP = x$, $CA = a$, l'on aura $PM = y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{aa - xx}$,

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = a dx \cdot$$

$(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Réduisant $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ en série, multipliant tous les termes de cette série par $a dx$,

$$\& \text{ intégrant, l'on aura l'arc } DM = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3 a^2} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^6} + \&c. \text{ Si}$$

* On peut, pour plus de facilité, faire d'abord $2a = c$, & substituer ensuite dans la série $2a$ au lieu de c .

l'on fait $x = a$, l'on aura le quart de cercle

$$D A C = a + \frac{a}{2 \cdot 3} + \frac{3a}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{15a}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \&c.$$

Si l'on fait $x = \frac{a}{2}$, comme x est le co-sinus de

l'arc $D M$, & par conséquent le sinus de $M D$, & que le sinus de l'arc de 30° est égal à la moitié du rayon, ainsi qu'on l'a dit dans la trigonométrie,

$$\text{l'arc } D M \text{ fera} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot a}{2^5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} +$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot a}{2^7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \&c. \text{ série assez convergente. Mul-}$$

tipliant cette série par 12, l'on aura la longueur du cercle entier.

Pour rectifier le cercle par le moyen d'une tangente, $A T = x$, l'on n'a qu'à se rappeler qu'on a trouvé ci-dessus (14) l'arc élémentaire $r i =$

$$\frac{a a d x}{a a + x x}. \text{ Or } \frac{a^2}{a a + x x} = a^2 (a a + x x)^{-1}$$

élevant donc $a a + x x$ à la puissance -1 , par le binôme de Newton, multipliant ensuite tous les termes de la série par $a a d x$, & intégrant,

$$\text{l'on aura l'arc } A r = a - \frac{x^3}{3 a^2} + \frac{x^5}{5 a^4} -$$

$$\frac{x^7}{7 a^6} \&c. = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 a^2} + \frac{x^4}{5 a^4} \&c. \right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \&c. \text{ en faisant } a = 1.$$

Si l'arc $A r$ est supposé de 45° , la tangente sera égale au rayon du cercle; donc cet arc sera $= (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.)$ Maintenant nous avons vu dans la première partie de

cet ouvrage, (Voyez la Géométrie) que si l'on a deux arcs a & b , l'on aura $\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}$, en faisant le rayon $= 1$; donc si l'on suppose que deux arcs p & q pris ensemble valent 45° , comme la tangente de 45° est égale au rayon, l'on aura $\frac{\text{tang. } p + \text{tang. } q}{1 - \text{tang. } p \cdot \text{tang. } q} = 1$, ou $\text{tang. } p + \text{tang. } q = 1 - \text{tang. } p \times \text{tang. } q$, ou $\text{tang. } q + \text{tang. } p \cdot \text{tang. } q = 1 - \text{tang. } p$, ou $\text{tang. } q = \frac{1 - \text{tang. } p}{1 + \text{tang. } p}$. Si l'on suppose que la tangente de l'arc p soit $= \frac{1}{2}$, l'on aura tangente $q = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Maintenant si dans

la série $x (1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \&c.)$ On suppose $a = 1$ & $x = \frac{1}{2}$, & ensuite $x = \frac{1}{3}$; l'on aura dans le premier cas $\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \&c.)$, & dans le second cas $\frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} \&c.)$.

Si l'on prend la valeur des quinze premiers termes de la première série (en s'en tenant à dix décimales), pour l'ajouter à la valeur des dix premiers termes de la seconde; l'on aura $1. (0.7853981634) = a. (0.7853981634)$. En exprimant le rayon par a , au lieu de l'exprimer par 1; donc l'arc de 45° , pris dans un cercle dont le

le rayon est $\approx a$, fera à peu près égal à cette quantité, & si l'on multiplie par 4, l'on aura la demi-circonférence $\approx a \cdot (3 \cdot 1415926536)$; donc le rayon sera à la demi-circonférence, ou le diamètre sera à la circonférence, comme $a : a \cdot (3 \cdot 1415926536) :: 1 : 3 \cdot 1415926536$ à peu près. L'on auroit un rapport plus exact, en calculant un plus grand nombre de termes dans les séries ci-dessus.

32. PROBLÈME. Rectifier un arc Dn de cycloïde. (Fig. 7.) En supposant le diamètre du cercle générateur $\approx a$, l'ordonnée $Pn \approx y$, $ir \approx ns$ sera $\approx dy$; or on a vu ci-dessus (15) que ns

$$\approx \frac{dx \sqrt{(ax - xx)}}{x} ; \text{ donc } dy \approx dx \times$$

$$\frac{\sqrt{(a - x)}}{\sqrt{x}}, \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \approx \sqrt{(dx^2 + dx^2 \times$$

$$\frac{(a - x)}{x})} = \frac{\sqrt{(1 dx^2)}}{\sqrt{x}} = a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \text{ dont}$$

$$\text{l'intégrale est } = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{ax} ; \text{ or la corde } DM$$

est moyenne proportionnelle entre le diamètre DC & la partie DP . (Voyez la géométrie.) Donc cette corde $\approx \sqrt{a \cdot x}$; donc l'arc cycloïdal Dn est double de la corde correspondante du cercle générateur; ainsi l'arc DA est double du diamètre & la cycloïde entière est quadruple du diamètre du cercle générateur.

33. PROBLÈME. Rectifier l'hyperbole MS , supposée équilatère & rapportée à ses asymptotes (Fig. 4).

Supposant que $AR = RS = a = 1$, $rR = x$,
l'on aura $y \cdot (1 + x) = a a = 1^*$, $y = \frac{1}{1+x}$
 $= 1 \cdot (1+x)^{-1}$, $dy = -dx \cdot (1+x)^{-2}$,
 $dy^2 = dx^2 \cdot (1+x)^{-4}$, $\sqrt{dx^2 + dy^2} =$
 $dx \sqrt{1 + (1+x)^{-4}}$. Réduisant en série la
quantité sous le signe par la formule $(a + b)^m$,
en faisant $a = 1$, $b = (1+x)^{-4}$, m
 $= \frac{1}{2}$, l'on aura $1 + \frac{1}{2} (1+x)^{-4} - \frac{1}{8}$
 $(1+x)^{-8} \&c.$ Multipliant tous les termes par dx ,
& intégrant en ajoutant une constante C , l'on a
l'arc indéfini $Su = x - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (1+x)^{-3}$
 $+ \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7} \&c. + C$. Pour détermi-
ner la constante C , je remarque que l'arc Su doit
être $= 0$, lorsque $x = 0$; mais alors la série de-
vient $-\frac{1}{6} + \frac{1}{7 \cdot 8} \&c.$; donc $C = +\frac{1}{6} -$
 $\frac{1}{7 \cdot 8} \&c.$ & l'intégrale complète est $x - \frac{1}{2 \cdot 3} x$
 $(1+x)^{-3} + \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7} \&c. +$
 $\frac{1}{6} - \frac{1}{7 \cdot 8} \&c.$

* Car l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée
aux asymptotes est $y \cdot x = a^2$; mais alors $Ar = x$, &
ici l'on fait $Ar = 1 + x$.

Si l'on compte les abscisses depuis le centre A , & qu'on fasse ces abscisses $= z$, les ordonnées $RS = u$, l'on aura $uz = aa$, $u = aa \cdot z^{-1}$, $du = aa \cdot z^{-2} dz$, (car l'ordonnée u diminuant l'abscisse z augmente), & alors l'élément ds de l'arc sera $= \sqrt{(du^2 + dz^2)}$
 $= dz \sqrt{(1 + a^4 z^{-4})} = \frac{dz}{z^2} \times \sqrt{(z^4 + g^2)}$, en faisant $a^2 = g$, & multipliant la quantité sous le signe par z^4 , & divisant la quantité hors du signe par $(z^4)^{\frac{1}{2}} = z^2$.

34. PROBLÈME Rectifier la trajectrice AM . (Fig. 6.) Soit la tangente $MT = a$, l'ordonnée $PM = y$, l'élément Mm sera $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mais (13) $dx = \frac{-dy \sqrt{(aa - y^2)}}{y}$; donc $dx^2 = dy^2 \cdot \frac{(a^2 - y^2)}{y^2}$,

& $Mm = ds = \sqrt{(dy^2 \cdot \frac{(aa - yy)}{y^2} + dy^2)} = \sqrt{(a^2 \cdot \frac{dy^2}{y^2})}$

$= \frac{a dy}{y}$; dont l'intégrale ou l'arc AM est $= a L.y$. Si

sur BD prise pour asymptote l'on décrit une logarithmique Ab dont la sous-tangente soit égale à la tangente a de la trajectrice, que l'on prolonge les lignes MF , mf , jusqu'à la rencontre de la logarithmique aux points s & t , desquels on abaissera les perpendiculaires (à l'asymptote) sH , $t\tau$ qui seront égales aux ordonnées PM , pm ; on aura $PM = y = sH$, $is = MR = -dy$ (parce que y va en diminuant, tandis que l'abscisse augmente.) Je dis qu'en faisant $BH = x$, l'on a BH égale à l'arc AM ; car puisque la sous-tangente de la logarithme est $= a$,

l'on a par la section précédente (23) $S. \frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, ou

(parce qu'on prend ici les x négatives à cause que l'ordonnée HS est plus petite que $BA' = a$, ou ce qui revient au même, parce que les ordonnées situées à la gauche de AB , d'où l'on commence à compter les

logarithmes, répondent à des x négatives), $S. \frac{dy}{y} =$

$= \frac{x}{a}$, d'où l'on tire $-x = \frac{a S. dy}{y} = a \cdot L.y = AM$;

donc $BH = AM$.

35. PROBLÈME. Rectifier la parabole de l'équation $y^3 = ax^2$, l'on a $x^2 = \frac{y^3}{a}$, $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx^2 = \frac{9}{4a} y \cdot dy^2$ & l'élément $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}$. En intégrant par la règle fon-

damentale, l'on aura $\frac{dy(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C =$

$\frac{8a}{27} \cdot (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C , je remarque qu'en supposant que AM (Fig. 1^{re}.) désigne la branche qu'on veut rectifier, l'arc AM doit être $= 0$, lorsque $y = 0$; or alors on a $\frac{8a}{27} \times (1)^{\frac{3}{2}} + C$; donc $\frac{8a}{27} + C = 0$, ou $C = -\frac{8a}{27}$, & l'intégrale complète est $\frac{8a}{27} (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Il y a une infinité de paraboles exactement rectifiables. Pour le faire voir, soit l'équation générale des paraboles $y^{m+n} = a^n \cdot x^n$, ou $y = a^{\frac{n}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}} = cx^n$, en faisant $a^{\frac{n}{m+n}} = c$, & $\frac{n}{m+n} = u$; donc $dy = u \cdot c \cdot x^{u-1} \cdot dx$, $dy^2 = u^2 c^2 \cdot x^{2u-2} dx^2$, $ds =$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + uu' \cdot C^2 x^{2u-2} \cdot dx^2)}$
 $= dx \sqrt{(1 + u^2 c^2 x^{2u-2})}$. Cette quantité sera intégrable si $2u - 2 = 1$; parce que la quantité hors du signe sera la différentielle de la quantité sous le signe, en divisant par une constante, ou si l'on veut parce que l'exposant u de x (car $d\ddot{x} = x^0 \times dx$) hors du signe, étant augmentée d'une unité sera divisible par l'exposant de la quantité sous le signe & donnera pour quotient un nombre entier positif $= 1$. Mais en changeant le signe de l'exposant de x sous le signe, l'on aura $x^{u-1} \cdot dx \sqrt{(x^{-2u+2} + u^2 c^2)}$ différentielle qui est intégrable si $(u - 1)$ augmenté d'une unité; c'est-à-dire, si u est exactement divisible par $-2u + 2$, & donne pour quotient un nombre entier positif, ou si l'on a $\frac{u}{-2u + 2} = p$, nombre entier positif. De cette équation l'on tire $u = 2p - 2u \cdot p$, $u + 2u \cdot p = 2p$, $u = \frac{2p}{2p + 1} = \frac{n}{m + n}$, ou $2p \cdot m + 2p \cdot n = 2p \cdot n + n$, $2p \cdot m = n$, $m = \frac{n}{2p}$, $m + n = \frac{n}{2p} + n = \frac{(2p + 1) \cdot n}{2p}$,

& l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$ devient $y^{\frac{(2p+1) \cdot n}{2p}} = a^{\frac{n}{2p}} x^n$, & en tirant la racine n , $y^{\frac{2p+1}{2p}} = a^{\frac{1}{2p}} x$; & toutes les paraboles qui sont comprises dans cette équation, sont exactement rectifiables, en supposant que p désigne un nombre entier positif. Si $p = 3$, l'on aura $y^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{6}} x$, & la parabole de cette équation sera exactement rectifiable.

36. PROBLÈME. Rectifier la parabole ordinaire dont l'équation est $y^2 = ax$, $2y dy = a dx$, $dx = \frac{2y dy}{a}$, $dx^2 = \frac{4y^2 \cdot dy^2}{a^2}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{a} \cdot \sqrt{(a^2 + 4y^2)}$. En réduisant en série la quantité sous le signe, multipliant ensuite les termes de la série par $\frac{dy}{a}$, & intégrant, l'on aura

l'arc A M (Fig. 1.) $= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} \&c.$ Si a étoit plus petit que y , l'on élèveroit $4y^2 + a^2$ à la puissance $\frac{1}{2}$ en prenant $4y^2$ pour le premier terme, & l'on intégreroit après avoir multiplié la série qui en résulteroit par $\frac{dy}{a}$.

Soit supposée décrite l'hyperbole équilatère B N (Fig. 8. A) dont le demi-axe B A soit égal au demi-paramètre $\frac{a}{2}$ de la parabole A M. Par la nature de l'hyperbole équilatère, $y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$, ou $x^2 = y^2 + \frac{a^2}{4}$, $x = \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}$; donc en supposant que A est le centre de l'hyperbole, A H le second axe, l'on aura A f $= x = h n = \sqrt{y y + \frac{a^2}{4}}$; car P M $= y = n f$; donc i N $= h H = d y$, & l'élément $h H N n$ de la surface hyperbolique comprise entre la courbe & le second axe (prolongé s'il le faut) est $d y \sqrt{\frac{a^2}{4} + y y} = \frac{1}{2} d y \sqrt{a a + 4 y y}$; donc l'espace hyperbolique A H B N divisé par le demi-paramètre $\frac{a}{2}$ de la parabole, donne l'arc parabolique correspondant A M; donc la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, réciproquement si l'on avoit l'arc parabolique A M en le multipliant par $\frac{a}{2}$, l'on auroit la quadrature de l'espace hyperbolique correspondant.

37. PROBLEME. Rectifier un arc d'ellipse D M. (Fig. 9.) Soit le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a a - x x)$ (en comptant les abscisses C P

du centre) $= b^2 - \frac{b b}{a a} . x x$, $2 y d y = - \frac{b^2}{a^2} x d x$, $d y = - \frac{b^2 x d x}{a^2 y}$, $d y^2 = \frac{b^4 x^2 d x^2}{a^4 y^2} =$ (en substituant pour y^2 la valeur prise de l'équation de la courbe) $\frac{b^2 x^2 d x^2}{a^2 (a a - x x)}$; donc $\sqrt{d x^2 + d y^2} = \sqrt{d x^2 + \frac{b^2 x^2 d x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = d x \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}}$. Ré-

solvant en série la quantité sous le signe en faisant dans la formule $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \&c. a=1, b$

$$= \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}, \text{ multipliant ensuite tous les termes de la série par } dx, \text{ intégrant, \& réduisant, l'on aura l'arc DM}$$

$$= x + \frac{b^2 x^3}{6 a^4} + \frac{(4 a^2 b^2 - b^4) x^5}{40 \cdot a^8} + \frac{(8 a^4 b^2 - 4 a^2 b^4 + b^6) x^7}{112 a^{12}}$$

+ &c. Si l'on fait $x=a$ l'on aura le quart d'ellipse DM

$$= a + \frac{b^2}{6 a} + \&c.$$

38. PROBLÈME. Rectifier un arc hyperbolique. Soit supposée AM (Fig. 1.) une hyperbole dont le demi-premier axe $=a$, le demi-second axe $=b$, l'on aura $y^2 =$

$$\frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2), dy = \frac{b^2 x dx}{a^2 y}, dy^2 = \frac{b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} =$$

$$\frac{b^2 x^2 dx^2}{a^2 x^2 - a^4}, \text{ en substituant la valeur de } y^2 \text{ prise de l'é-$$

quation de la courbe; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \times$

$\sqrt{(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 x^2 - a^4})}$, différentielle qu'il ne sera pas difficile d'intégrer en la réduisant en une série.

REMARQUE. Si l'on fait $z=x$, cette différentielle

sera $= dz \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{z^2}{z^2 - a^2})}$. En supposant $\frac{b b}{a a} = g$,

multipliant & divisant par $z^2 - a^2$, la quantité sous le signe

deviendra $\frac{z^2 - a^2 + g z^2}{z^2 - a^2} = \frac{(g+1) \cdot z^2 - a^2}{z^2 - a^2}$; donc

la différentielle sera $= \frac{dz \sqrt{((g+1) \cdot z^2 - a^2)}}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$;

supposant maintenant $(g+1) \cdot z^2 - a^2 = a x^2$, ou

$$z^2 = \frac{a x + a a}{g+1}, \text{ on trouve } 2 z dz = \frac{a dx}{g+1}, dz = \frac{a dx}{2 z (g+1)}$$

$$= \frac{a dx}{\sqrt{(g+1) \cdot 2 \sqrt{(a x + a a)}}}, \& \frac{dz \sqrt{((g+1) \cdot z^2 - a^2)}}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$$

* x n'exprime pas ici l'abscisse de la courbe.

$$= \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \sqrt{(x+a)} \cdot \sqrt{(x-ga)}} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \sqrt{(xx+ax.(1-g)-gaa)}}$$

$$= \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \cdot \sqrt{\left(xx+x \left(\frac{aa-bb}{a} \right) - bb \right)}}, \text{ en remettant la}$$

valeur de g . Si l'hyperbole est équilatère, alors $b=a$ & la différentielle devient $= \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \cdot \sqrt{(xx-bb)}}$. Si l'on fait

$$\frac{aa-bb}{a} = \pm p, \text{ la différentielle deviendra } =$$

$$\frac{dx \sqrt{ax}}{2 \cdot \sqrt{(xx \pm px - bb)}}. \text{ Le signe } + \text{ a lieu si } a \text{ est plus grand que } b, \text{ \& le signe } - \text{ si } b > a.$$

S'il s'agit de l'hyperbole rapportée au second axe, l'abscisse sur ce second axe étant z , l'ordonnée étant u , l'on aura $uu = \frac{aa}{bb} \cdot (zz+bb)$ (par la nature de la

courbe) $= g \cdot (zz+bb)$, en faisant $\frac{aa}{bb} = g$. L'on aura donc $u du = g \cdot z dz$, & alors l'élément de l'arc hyperbolique sera $= \sqrt{(dz^2 + du^2)}$; donc à cause de $du = \frac{gz dz}{u}$

$$\& \text{ de } du^2 = \frac{g^2 z^2 dz^2}{u^2} = \frac{g z^2 dz^2}{zz+bb}, \text{ cet élément sera } = \frac{dz \sqrt{((g+1)z^2+bb)}}{\sqrt{(zz+bb)}}. \text{ En supposant } (g+1) \cdot z^2 + b^2$$

$$= bx, \text{ ou } z^2 = \frac{bx-bb}{g+1}, \text{ on aura } 2z dz = \frac{dx}{g+1}, \& \text{ à}$$

$$\text{cause de } z = \sqrt{\frac{bx-bb}{g+1}}, \text{ l'on a } dz = \frac{b dx}{2 \cdot z(g+1)} =$$

$$\frac{b dx}{\sqrt{(g+1)} \cdot 2 \sqrt{(bx-bb)}} \& \frac{dz \sqrt{((g+1) \cdot z^2 + b^2)}}{\sqrt{(zz+bb)}}$$

$$\frac{dx \sqrt{bx}}{2 \cdot \sqrt{(xx + bx \cdot (g - 1) - gbb)}} = \frac{dx \sqrt{bx}}{2 \cdot \sqrt{(xx + x \cdot (\frac{a^2 - bb}{b}) - aa)}} = \sqrt{(dz^2 + du^2)}$$

On a trouvé ci-dessus (33.) que la différentielle de l'arc hyperbolique en rapportant la courbe aux asymptotes & faisant $g=aa$, étoit $= \frac{dz}{z} \sqrt{(z^2 + g^2)}$. Si l'on fait $z = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, cette différentielle deviendra $= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(xx + g^2)}$; car alors $dz = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$.

L'on a trouvé (37) que l'élément de l'arc elliptique étoit $= \sqrt{(dx^2 + \frac{b^2 \cdot x^2 dx^2}{a^2(a^2 - x^2)})}$. Si l'on fait $z = x$ & $\frac{b^2}{a^2} = g$, cet élément devient $= dz \sqrt{(1 + \frac{g \cdot z^2}{a^2 - z^2})}$
 $= dz \sqrt{(a^2 - z^2 + gz^2)} = dz \cdot \frac{\sqrt{(g-1) \cdot z^2 + a^2}}{\sqrt{(aa - z^2)}}$
 En supposant $(g-1) \cdot zz + aa = ax$, ou $zz = \frac{ax - aa}{g-1}$, l'on aura $2zdz = \frac{a dx}{g-1}$, $dz = \frac{a dx}{(g-1) \cdot 2z}$
 $\frac{a dx}{\sqrt{(g-1) \cdot 2} \sqrt{(ax - aa)}}$, & en faisant l'ordonnée $= u$, l'on aura $\sqrt{(du^2 + dz^2)} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \cdot \sqrt{(ax \cdot (g+1) - xx - gaa)}}$
 $= \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \sqrt{(x \cdot (\frac{aa + bb}{a}) - xx - bb)}} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \sqrt{(px - xx - bb)}}$

p étant une quantité positive $= \frac{aa + bb}{a}$. Il faut bien se souvenir que dans ces formules x n'est pas l'abscisse de la courbe.

39. Si l'angle des ordonnées & des abscisses n'étoit pas droit, la formule de l'élément ds seroit différente. Soit (Fig.

14.) l'angle $M P N = \gamma$, en supposant $M n$ parallèle aux $x = A P$, l'angle $M n p$ sera égal à son alterne interne $n p N = \gamma$. Je tire $M R$ perpendiculaire à l'ordonnée $m p$, le triangle rectangle $M n R$, donne (en faisant le sinus total $= r$) $r : \cos. \gamma :: M n = d x : n R = \frac{d x \cdot \cos. \gamma}{r}$.

Le même triangle donne $(M R)^2 = d x^2 - \frac{d x^2 (\cos. \gamma)^2}{r r}$

Or $R m = R n + n m = \frac{d x \cos. \gamma}{r} + d y$, & le triangle rectangle $M m R$ donne $(M m)^2 = (d s)^2 = (R m)^2 + (M R)^2$, ou $d s = \sqrt{(d x^2 + d y^2 \pm \frac{2 \cdot \cos. \gamma}{r} \times d x d y)}$. Le signe $+$ a lieu lorsque l'angle γ est aigu & le signe $-$ si cet angle est obtus.

Si une courbe $A B$ étoit rapportée au foyer C (Fig. 15), en décrivant du point C avec le rayon $C B = y$ l'arc infiniment petit $B n$, l'on auroit $B b = d s = \sqrt{(d x^2 + d y^2)}$, formule dans laquelle il faut éliminer $d x$ qui est un arc décrit d'un rayon variable; par conséquent on ne peut trouver l'intégrale qu'en chassant $d x$.

40. PROBLÈME. Rectifier la spirale d'archimedes (Fig. 16). En faisant $C A = a$, la circonférence de ce rayon $= c$, l'arc $A M = \gamma$, le rayon $C B$ de la spirale $= y$, l'on aura $a \gamma = c y$, $a d \gamma = c d y$. Ayant décrit du point C , l'arc infiniment petit $B n$, l'on aura $M m = d \gamma :$

$B n = d x :: a : y$, ou $d x = \frac{y d \gamma}{a}$, $d x^2 =$

$\frac{y^2 d \gamma^2}{a a}$; mais $d \gamma = \frac{c d y}{a}$; donc $d x^2 = \frac{y^2 c^2 d y^2}{a^4}$,

* Si l'angle $\gamma = M n R$ étoit obtus, le point R tomberoit entre n & m & l'on auroit $R m = d y - \frac{d x \cdot \cos. \gamma}{r}$.

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy \sqrt{1 + \frac{y^2 c^2}{a^4}} \\ = \frac{c}{a^2} \cdot dy \cdot \sqrt{y^2 + \frac{a^4}{c^2}} , \text{ différentielle} \\ \text{qu'on peut facilement intégrer par les séries.}$$

Nous avons trouvé ci-dessus (36.) que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire de l'équation $y^2 = ax$ est $= \frac{dy}{a} \sqrt{aa + 4y^2}$, cette quantité est $= \frac{2 dy}{a} \times \sqrt{\frac{1}{4} aa + y^2}$, a étant le paramètre ; c'est-à-dire, que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire AM (Fig. 1.) est égal à la différentielle dy , divisée par la moitié du paramètre & multipliée par la racine de la somme des carrés de l'ordonnée & du demi-paramètre ; donc (Fig. 16.) si sur CP (perpendiculaire à Cb prise pour axe), l'on décrit avec le paramètre $\frac{2aa}{c}$ la parabole CN , dont $CP = x$, $PN = Cb = y$, CN sera $= \frac{c}{a^2} S. dy \cdot \sqrt{y^2 + \frac{a^4}{c^2}}$; donc l'arc $Cfb = CN$; ainsi la rectification de la spirale d'Archimedes dépend de celle de la parabole ordinaire.

41. PROBLÈME. Rectifier la spirale hyperbolique CM (Fig. 17.) soit $= a$, le co-finus de l'angle du rayon avec la courbe. Dans le triangle rectangle Mmn , l'on a (en faisant le sinus total $= 1$)

$$a : 1 :: mn = dy : Mm = ds = \frac{dy}{a} ; \text{ donc}$$

l'arc CM est $= \frac{y}{a}$; mais le triangle rectangle CMT

$$\text{donne } a : 1 :: y : MT = \frac{1 \cdot y}{a} = \frac{y}{a} ; \text{ donc l'arc}$$

CM est égal à la tangente MT . Si l'angle de la courbe avec son rayon est de 45° degrés, le

triangle rectangle $M C T$ fera isocelle , & l'on aura $M T = \sqrt{2 y^2} = y \sqrt{2}$. On peut voir par-là , que quoique la courbe $M C$ fasse une infinité de révolutions autour de C avant de pouvoir parvenir à ce point , cependant sa longueur est égale à une ligne finie $M T$. Nous supposons le rayon CM fini.

Ayant décrit un cercle d'un rayon $C s = a$, par le point A où la spirale coupe le cercle , je tire la ligne indéfinie $C D$ & par le centre C la ligne $C B$ perpendiculaire à $C D$. Entre les lignes CB , CD comme asymptotes , je décris l'hyperbole FH , dont la puissance soit $= aa$, & du Centre C , je décris l'arc $n M D$.

Maintenant si on suppose qu'en faisant $A s = z$, $A g = c^*$, l'on ait toujours $z = c L y^{**}$, l'on aura l'équation de la spirale logarithmique $d z =$

$c \cdot \frac{d y}{y}$. Mais les secteurs semblables $C s f$, $C M n$

donnent $a : s f = d z :: y : M n = d x = \frac{y d z}{a}$

$= \frac{c}{a} d y$, en substituant la valeur de $d z$;

les mêmes secteurs donnent $y : d x = \frac{c d y}{a} :: C s$

$= a : s f = \frac{c d y}{y}$; donc l'arc $A s = S. \frac{c d y}{y}$. Si

l'on faisoit $A D = x$ & $A C = b$, l'on auroit

* L'on pourroit supposer l'arc $A g$ égal à la circonférence du cercle.

** Si l'on fait $z = n L \frac{y}{b}$, on aura encore une autre équation qui appartiendra à une spirale logarithmique.

l'espace $F A H D = S. \frac{a a d x}{b + x}$, comme cela est évident par ce qu'on a dit ci-dessus (8); donc si on fait $C M = C D = y$, $b + x$ sera $= y$, $d x = d y$ & l'espace dont on vient de parler sera $= S. \frac{a a d y}{y}$. Si l'on multiplie $A s$ par a , il vient

$S. \frac{c . a . d y}{y}$, & l'on a l'aire $A F H D : a . A s ::$

$S. \frac{a a d y}{y} : S. \frac{c . a d y}{y} :: a : c$; donc $A F H D =$

$\frac{a a}{c} . A s$. Supposons maintenant que l'arc $A L$

soit tel que l'on ait $a : c :: A L : A s$, l'on aura $\frac{a}{c} = \frac{A L}{A s}$; donc l'espace hyperbolique $A F H D$

sera $= a . A L$. Si $a = c$, le point L tombera sur le point s . Si le point M est dans la première spire* hors du cercle (à compter depuis le point A), l'arc $A s$ sera plus petit que la circonférence; s'il est dans la seconde spire, l'arc $A s$ sera égal à une circonférence entière plus un arc moindre que la circonférence; s'il est dans la troisième, l'arc sera composé de deux circonférences, plus un arc moindre que la circonférence; &c. Il faut dire la même chose de la branche qui est renfermée dans le cercle. On peut voir par-là que si l'on connoissoit la longueur exacte de l'arc $A s$, l'on auroit la quadrature de l'espace hyper-

* Lorsque z est devenue égale à la circonférence, elle devient ensuite égale à une circonférence plus un arc compté depuis l'origine que je suppose en A , & si le point M est à l'extrémité de la première spire hors du cercle, l'arc $A s$ sera égal à la circonférence, &c.

bolique dont on vient de parler , & qu'il y a une très-grande connexion entre la quadrature de l'hyperbole & celle du cercle.

42. PROBLÈME. Rectifier la développante du cercle. Soit AB (Fig. 15.) cette développante. Puisque le rayon sB de la développée est toujours perpendiculaire à la ligne de développement, & que, selon ce qu'on a dit ci-dessus (27.), en faisant l'arc $As = z$ & le rayon $CA = a$, l'arc élémentaire Bb sera $= \frac{z}{a} dz$, l'intégrale $\frac{z^2}{2a}$ sera $= AB$. Si z est égale à la circonférence c du cercle, la branche entière AB sera $= \frac{c^2}{2a}$. Donc on aura $2a : c :: c : AB$, en supposant que AB désigne toute la branche ; c'est-à-dire, que le diamètre du cercle est à sa circonférence comme cette circonférence est à la longueur de sa développante ; ou, ce qui revient au même, la circonférence du cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre & la développante.

COROLLAIRE I. Donc si on décrivait un second cercle dont le diamètre fût égal à la circonférence ApA , la circonférence d'un tel cercle seroit égale à la développante du cercle ApA . Si l'on décrivait un troisième cercle dont le diamètre fût égal à la circonférence du second, la circonférence de ce troisième cercle, seroit égale à la développante du second, & ainsi de suite. Si l'on décrit donc tant de cercles que l'on voudra dont les diamètres soient dans une progression géométrique $\therefore a : b : c : D : e : f : g$ &c. De manière que b soit la circonférence du cercle dont a est le diamètre, c la circonférence du cercle dont b est le diamètre, & ainsi de suite, la circonférence de chacun de ces cercles sera égale à la développante de celui qui le précède.

COROLLAIRE II. Si on se sert du rapport d'Archimedes pour avoir la circonférence d'un cercle dont le diamètre seroit $= 2a$, l'on aura $7 : 22 :: 2a : c = \frac{2 \cdot 22 \cdot a}{7}$; donc $\frac{c^2}{2a}$, ou la développante sera

$$\frac{2 \cdot 22 \cdot a \cdot 2 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot a} = \frac{2 \cdot 22 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7} = (19 + \frac{37}{49}) \cdot a$$

DE LA CUBATURE DES SOLIDES ET DE LA
QUADRATURE DE LEUR SURFACE.

43. Nous considérons ici les solides , comme produits par la révolution d'un plan au-tour d'une ligne que l'on peut appeller *axe de rotation*. Si l'on conçoit que le plan de la courbe, AM (Fig. 13.) se meut au-tour de l'axe AP , l'arc de courbe AM engendrera une surface convexe , & le plan AMP un solide. Soit le rapport du rayon à la circonférence égal à celui de $r : c$; l'on aura la circonférence décrite par le rayon $PM = y$ pendant la révolution de la courbe au-tour de AP , en faisant $r : c :: PM : \frac{c \cdot PM}{r} =$

$\frac{c \cdot y}{r}$. Si l'on multiplie cette circonférence par la moitié du rayon y , l'on aura l'aire du cercle que décrit $PM = \frac{c y^2}{2 \cdot r}$. Multipliant cette surface par $Pp = dx$, l'on aura un cylindre infiniment petit (engendré par le plan PMR_p , cylindre qu'on peut regarder comme l'élément du solide cherché) $= \frac{c y^2 dx}{2 r}$. Si on substitue dans cette formule la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe ou du plan générateur , & qu'on integre , l'on aura le solide cherché.

Pendant que le plan de la courbe se meut autour de l'axe AP , l'arc infiniment petit MM décrit la surface latérale d'un cône tronqué

dont la hauteur est infiniment petite; pour avoir cette surface, il faut, selon ce qu'on a dit dans la géométrie (104.), multiplier le côté MA du cône tronqué par la circonférence qui passe par le milieu n du côté de ce cône, ou par la circonférence du rayon bn , qu'on peut supposer $\equiv PM = y$; or $MA = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sera l'élément de la surface cherchée. Si on substitue la valeur de y & de dy , ou bien celle de dx dans la formule que l'on vient de trouver, & que l'on integre, l'on aura la surface décrite par la ligne AM .

44. PROBLÈME. Trouver la solidité & la superficie de la sphere (Fig. 18). Soit le diamètre $AB = 2r$, l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, l'on aura par la nature du cercle générateur $AMBN$, $y^2 = 2rx - x^2$. Donc la formule $\frac{cy^2 dx}{2r}$ devient $\equiv cx dx - \frac{cx^3 dx}{2r}$

$$\& S. \frac{cy^2 dx}{2r} \equiv \frac{c}{2r}. S. yy dx \equiv \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{3 \cdot 2r}$$

Donc la portion de la sphere engendrée par le demi-segment APM en tournant autour de l'axe AB

$$\text{est} \equiv \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r} \equiv \frac{3crx^2 - cx^3}{6r}. \text{ Si l'on suppose } x = 2r, \text{ la sphere entiere sera } \equiv \frac{12 \cdot cr^3 - 8 \cdot c \cdot r^3}{6r} \equiv \frac{4c \cdot r^3}{6r} \equiv \frac{2}{3} \cdot cr^2 \equiv$$

$$2cr \cdot \frac{1}{3}r; \text{ or } \frac{cr}{2} \text{ désigne un grand cercle de cette sphere}$$

&

& $2cr$ le quadruple de ce grand cercle; donc la solidité de la sphere est égale au quadruple d'un grand cercle de la sphere multiplié par le tiers du rayon, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la géométrie.

Pour avoir la surface, je remarque que l'équation $y^2 = 2rx - x^2$ donne $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$,
 $dy = \frac{dx \cdot (r - x)}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, $dy^2 = \frac{dx^2 (r - x)^2}{2rx - x^2}$.

Substituant cette valeur de dy^2 dans la formule générale $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & réduisant, il vient

$$\frac{cy}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{r^2 dx^2}{2rx - x^2} \right)} = \frac{cry dx}{r \cdot \sqrt{(2rx - x^2)}}.$$

Si l'on divise le numérateur par y & le dénominateur par $\sqrt{(2rx - x^2)} = y$, l'on a $\frac{cr dx}{r}$,

dont l'intégrale est $\frac{crx}{r}$. Si l'on fait $x = 2r$ l'on

aura la surface entiere de la sphere $= \frac{2r \cdot cr}{r} =$

$2 \cdot rc$; c'est-à-dire, la surface entiere de la sphere est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.

Si l'on avoit supposé le diamètre de la sphere $= 2a$, l'on auroit trouvé $S. \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{acx}{r}$. Si l'on fait $r : c :: a : z = \frac{ac}{r}$, l'on aura

la circonférence d'un cercle dont le rayon est a ; donc la surface d'une calotte sphérique NAM est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

45. PROBLÈME. *Cuber un conoïde parabolique d'un genre quelconque.* Supposons le paramètre de la parabole génératrice $= 1$, l'on pourra représenter toutes les paraboles par l'équation x

$= y^m$; donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, $y^2 = x^{\frac{2}{m}}$. Substi-

tuant cette valeur de y^2 dans la formule $\frac{c y^2 dx}{2r}$,

il vient $\frac{c x^{\frac{2}{m}}}{2r} dx$, dont l'intégrale $\frac{m \cdot c x^{\frac{2+m}{m}}}{2r \cdot (2+m)} =$

$\frac{m \cdot c y^2 x}{4r + 2rm}$ est la valeur du solide formé par la révolution de la courbe autour de son axe. Si on fait $x = a$, & que cette courbe soit la parabole ordinaire (Fig. 1^{re}.), l'on aura $m = 2$; &

le paraboloides fera $= \frac{2c \cdot y^2 a}{8r}$. Si l'on sup-

pose $y = PM = r$, le conoïde fera $= \frac{1}{2} cr \cdot \frac{a}{r}$.

Or $\frac{1}{2} cr$ représente le cercle dont le rayon est $= r = PM$; donc le conoïde parabolique du premier genre est égal à la moitié d'un cylindre de même base & de même hauteur. Si $m = 3$, l'on

aura $\frac{1}{2} rc \cdot \frac{3a}{5}$. C'est-à-dire, que le conoïde de

la parabole de l'équation $y^3 = x$ est égal à un cylindre de même base, mais dont la hauteur est seulement les $\frac{3}{5}$ de la hauteur a du conoïde, & ainsi des autres.

46. PROBLÈME. *Trouver la surface d'un conoïde formé par la révolution de la demi-parabole ordinaire autour de son axe.* Soit supposée AM (Fig. 1^{re}.)

la courbe génératrice, dont l'équation soit $y^2 = ax$, l'on aura $adx = 2ydy$, $dx = \frac{2ydy}{a}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$. Donc en substituant cette valeur de dx^2 , l'on aura l'élément de la surface $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{cydy}{ar} \sqrt{4y^2 + aa}$. Maintenant si l'on intègre cette différentielle par la règle fondamentale *, la surface cherchée sera $= \frac{c}{12.ar} (4y^2 + aa)^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C l'on remarquera qu'en faisant $y = 0$, la surface doit être $= 0$; donc $adx \frac{c}{12.ar} (aa)^{\frac{3}{2}} + C = 0$, ou $\frac{c}{12r} aa + C = 0$, ou $C = -\frac{caa}{12r}$; donc l'intégrale complète est $= \frac{c}{12ar} \times (4y^2 + aa)^{\frac{3}{2}} - \frac{caa}{12r}$.

47. PROBLÈME. Trouver la solidité d'un conoïde engendré par la révolution de la demi-parabole AM autour de la tangente AB (Fig. 1^{re}). Soit le paramètre $= a$, Ai $=$ Fn $= x$, in $=$ AF $= y$, FB $= dy$. Le cercle décrit avec le rayon

* C'est-à-dire, en augmentant l'exposant $\frac{1}{2}$ d'une unité, divisant par $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, & par la différentielle $2ydy$ de la quantité sous le signe.

FN sera $= \frac{c \cdot x x}{2r}$. Multipliant ce cercle par dy , l'on aura l'élément engendré par le plan BMFn $= \frac{c x^2 dy}{2r} = \frac{c y^4 dv}{2a^2 r}$ (à cause de $x^2 = \frac{y^4}{a^2}$, par la nature de la courbe), dont l'intégrale est $\frac{c y^5}{10 \cdot a^2 r} = \frac{c a^2 x^2 y}{10 \cdot a^2 r} = \frac{c x^2 y}{10 \cdot r}$, en mettant $a^2 x^2$ au lieu de y^4 . Si l'on suppose $x = AP = b$, $PM = y = g$, le conoïde engendré par le plan AMB sera $= \frac{c b^2 g}{10 \cdot r}$.

Mais le cercle dont b est le rayon est $= \frac{c b^2}{2r}$. Si l'on multiplie cette quantité par g , l'on aura un cylindre $\frac{c b^2 g}{2r}$, qui fera au solide qu'on vient de trouver comme $\frac{c b^2 g}{2r} : \frac{c b^2 g}{10 \cdot r} :: \frac{1}{2r} : \frac{1}{10r} :: 10r : 2r :: 10 : 2 :: 5 : 1$. Il n'est pas difficile de voir que le conoïde engendré par le plan APM est $= \frac{2 c l^2 g}{5 r}$.

48. PROBLÈME. Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une hyperbole autour de son axe. Soit supposée AM (Fig. 12) une hyperbole ordinaire, dont l'équation soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$. Si l'on fait $2a : 2b :: 2b : p$, l'on aura le paramètre $p = \frac{2b^2}{a}$ & $b^2 = \frac{ap}{2}$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$. Ainsi l'équation

fera $y^2 = \frac{p}{2a} \sqrt{(2ax + xx)}$. Si l'on fait le premier axe $= a$, cette équation fera $y^2 = \frac{p}{a} \sqrt{(ax + xx)}$; donc $\frac{c}{2r} S. y^2 dx$ est $= \frac{pc}{2ra} \times S. (ax dx + x^2 dx) = \frac{pc}{2ra} \left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$. Si on suppose $x = a$, le conoïde hyperbolique devient $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{p}{a} \left(\frac{5a^3}{6} \right) = \frac{c \cdot p}{2r} \left(\frac{5a^2}{6} \right)$. Si l'on fait $r : c :: a : \frac{ca}{r}$, l'on aura la circonférence du rayon a , & multipliant cette circonférence par $\frac{a}{2}$ l'on aura la surface du cercle du rayon $a = \frac{ca^2}{2r}$. Multipliant cette surface par $\frac{5p}{6}$, l'on aura un cylindre dont la hauteur seroit $\frac{5p}{6}$, & ce cylindre fera à un cylindre de même base, mais dont la hauteur seroit $= a$, comme $\frac{5p}{6} : a :: 5p : 6a$. Ainsi un conoïde hyperbolique dont la hauteur est égale au premier axe, est au cylindre de même base & de même hauteur, comme le quintuple du paramètre du premier axe est au sextuple de cet axe. Si l'hyperbole est équilatere, alors $p = a$ & le conoïde hyperbolique dont la hauteur est égale à l'axe, est au cylindre de même base & de même hauteur comme 5 : 6.

49. PROBLÈME. Trouver la surface d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole équilatere autour de son axe. En faisant le

demi-axe $CA = a$, l'on a $y^2 = x^2 - aa$, en comptant les abscisses CP (Fig. 12) du centre. Donc $y = \sqrt{xx - aa}$, $dy = \frac{x dx}{\sqrt{xx - aa}}$; donc

$$S. \frac{cy}{r} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = S. \frac{cdx}{ar} \cdot \sqrt{2aax^2 - a^4}$$

$$= S. \frac{cgdx}{ar} \left(x^2 - \frac{a^4}{g^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (en faisant } 2aa = g^2 \text{ \& divisant sous le signe par } g^2 \text{ \& multipliant hors du signe par } g \text{)}$$

$$= S. \frac{cgdx}{a \cdot r} \cdot (x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ en faisant } \frac{a^4}{g^2} = \frac{a^2}{2} = b^2 ; \text{ on pourra intégrer par les séries.}$$

50. PROBLÈME. Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique produit par le plan $DgAC$, lorsque l'hyperbole Ag fait sa révolution autour du second axe CD (Fig. 11). En faisant le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa} (xx - aa)$, ou $x^2 = \frac{aa}{bb} \times (yy + bb)$. La circonférence du cercle décrit avec le rayon $CP = HG$ est $= \frac{cx}{r}$ & sa surface est

$$= \frac{cx^2}{2r}. \text{ Si l'on multiplie cette surface par}$$

$HD = mg = dy$, l'on aura $\frac{cx^2}{2r} dy$, élément du solide produit par le plan $DgHG$. Si dans cet élément on substitue la valeur de xx , l'on a

$$a \cdot \frac{c \cdot aa}{2r \cdot bb} (y^2 dy + b b dy), \text{ dont l'intégrale est}$$

$$\frac{c a a}{2 r . b b} \left(\frac{y^3}{3} + b b y \right) = \frac{c}{2 r} \left(\frac{a a}{3 b b} y^3 + a a y \right).$$

Si l'on suppose $p . g = y = b$, le conoïde devient $= \frac{c}{2 r} \left(\frac{a^2 b}{3} + a^2 b \right) = \frac{c}{2 r} \left(\frac{4}{3} a^2 b \right) = \frac{c a^2}{2 r} \left(\frac{4}{3} b \right)$. Mais $\frac{c a^2}{2 r}$ désigne la surface d'un cercle dont le rayon est $= a$; donc le conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole autour du second axe & dont la hauteur est égale au demi-second axe b est les $\frac{4}{3}$ d'un cylindre de même baze & de même hauteur.

Si du solide dont on vient de parler, on retranche le cylindre $C A b D$, on aura le solide engendré par le plan $b A g$.

51. PROBLÈME. *Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique engendré par le plan SRm pendant que l'hyperbole FMS , que nous supposons équilatere, tourne autour de l'assymptote AR (Fig. 4). Soit l'équation de l'hyperbole équilatere $y x = a^2$ & soit aussi supposée $AR = RS = a$, l'on aura $y^2 = \frac{a^4}{x x}$; donc $\frac{c}{2 r} x$*

$$S. y^2 d x = \frac{c}{2 r} \cdot S. \frac{a^4}{x^2} d x = \frac{c}{2 r} \cdot S. a^4 x^{-2} . d x$$

$$= - \frac{c}{2 r} a^4 x^{-1} + C. \text{ Pour déterminer la constante } C,$$

je remarque que le solide cherché doit être $= 0$, lorsque x est $= A R = a$; donc $-$

$$\frac{c}{2 r} a^3 + C = 0, \text{ ou } C = + \frac{c a^3}{2 r}, \text{ \& l'intégrale complete est } = \frac{c a^3}{2 r} - \frac{c a^4}{2 r x}.$$

Si on suppose

$$x = \infty, \text{ ce solide devient } = \frac{c a^3}{2 r}. \text{ Or } \frac{c a^3}{2 r} \text{ désigne un}$$

cercle dont le rayon est $\equiv a$, & $\frac{ca^2a}{2r} \equiv \frac{ca^3}{2r}$

désigne un cylindre dont le rayon de la base seroit $\equiv a$ & la hauteur $\equiv a$, ou un cylindre décrit par la révolution du plan $ARST$ autour de AR ; donc ce cylindre est égal au conoïde infiniment long, décrit par le plan $RSmu$.

52. PROBLÈME. Trouver le solide engendré par le plan $NPam$, pendant que la logarithmique fait une révolution autour de son asymptote Pa (Fig. 5). La sous-tangente de cette courbe étant

supposée $\equiv a$, l'on aura $\frac{y dx}{dy} \equiv a$, $dx \equiv$

$\frac{a dy}{y}$; donc $\frac{c}{2r} S. y^2 dx \equiv \frac{c}{2r} S. a y dy \equiv$

$\frac{c}{2r} \cdot \frac{a y^2}{2} \equiv \frac{c y^2}{2r} \cdot \frac{a}{2}$. Si l'on suppose que y

$\equiv PN$ est $\equiv b$, le solide produit par l'espace in-

finiment long $NmaP$, sera $\equiv \frac{c b b}{2r} \cdot \frac{a}{2}$.

Or $\frac{c b^2}{2r}$ désigne la surface d'un cercle dont le

rayon $\equiv b$; donc ce solide est la moitié d'un cylindre dont le rayon de la base est l'ordonnée de la logarithmique, & la hauteur, la sous-tangente de la logarithmique.

53. PROBLÈME. Trouver, 1°. la solidité, 2°. la surface convexe d'un solide formé par un plan BMb qui coupe obliquement un cylindre droit, de manière que la section passe par le centre de la base du cylindre (Fig. 19). Si l'on conçoit une infinité de

plans $M m P$, $C D a$, perpendiculaires à la base de l'onglet, ces plans formeront des triangles, rectangles semblables, puisque leurs angles situés sur le diamètre $b B$ perpendiculaire à $A a$, seront égaux. Par la nature du cercle, en faisant $P m = y$, $b B = 2 a$, l'on a $y^2 = 2 a x - x x$. Si l'on fait la hauteur du solide $D a = b$, les triangles semblables $C a D$, $M m P$ donneront $C a = a$: $a D = b :: P m = y : M m = \frac{b y}{a}$. Multipliant

$M m$ par $\frac{y}{2}$, l'on a le triangle $M m P = \frac{b y y}{2 a}$; si l'on multiplie ce triangle par $d x = P p$;

l'on aura l'élément de l'onglet $= \frac{b y^2}{2 a} \cdot d x =$

$\frac{b}{2 a} (2 a x d x - x x d x)$, dont l'intégrale

est $= \frac{b}{2 a} (a x^2 - \frac{x^3}{3}) = \frac{b}{2 a} \times$

$(3 a x^2 - x^3)$ & lorsque $b P = x$ est $= 2 a$, l'on

a la solidité de l'onglet $= \frac{2}{3} a a b = a a \cdot \frac{2}{3} b$, c'est-à-dire, que la solidité d'un tel onglet est égale à un prisme dont la base seroit égale au quarré du rayon de la base du cylindre & dont la hauteur seroit les $\frac{2}{3}$ de celle de l'onglet.

Pour avoir la surface, je remarque qu'en multipliant l'arc élémentaire $n m$ par $m M$, l'on aura l'élément de la surface cherchée. En comptant les abscisses du centre l'élément de l'arc circulaire

est (31.) $= \frac{a d x}{\sqrt{(a a - x x)}} = \frac{a d x}{y}$. Mais $m M$ est $=$

$\frac{by}{a}$ comme on vient de le voir. Donc l'élément de la surface est $\equiv b dx$ & la surface cherchée $\equiv bx$. Si $x \equiv a$, la demi-surface convexe de l'onglet sera $\equiv ba$, & par conséquent la surface entière sera $\equiv 2ab$, ou égale au rectangle du diamètre de la base du cylindre & de la hauteur de l'onglet.

54. PROBLÈME. Soit AD (Fig. 9) un quart d'ellipse on demande le rapport des solides produits par la révolution de l'aire ADC autour du demi-grand axe $AC \equiv a$ & du demi-petit axe $DC \equiv b$. Soit $CP \equiv Mp \equiv x$, $PM \equiv Cp \equiv y$, l'on aura $y^2 \equiv \frac{b^2}{aa} (aa - xx) \equiv bb - \frac{bb}{aa} x^2$, $x^2 \equiv aa - \frac{aa}{bb} y^2$; donc le solide produit par la révolution de l'aire elliptique $CPMD$ autour de AC sera $\equiv \frac{c}{2r} \times S. y^2 dx \equiv \frac{c}{2r} S. (bb dx - \frac{bb}{aa} x^2 dx) \equiv \frac{c}{2r} (bbx - \frac{bbx^3}{3aa})$. Si l'on fait $x \equiv a$, le solide décrit par le quart d'ellipse ACD sera $\equiv \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} b^2 a$. Le solide produit par la révolution du segment $CpMA$, autour de DC , sera $\equiv \frac{c}{2r} S. x^2 dy$ (parce que ici l'ordonnée $pM \equiv x$, le cercle décrit par cette ordonnée est $\equiv \frac{c}{2r} x^2$ & la différentielle de $Cp \equiv PM \equiv y$ est $\equiv dy$; De sorte qu'il faut changer y en x , &

réciroquement) $= \frac{c}{2r} S. (a a d y - \frac{a a}{b b} y^2 d y) =$
 $\frac{c}{2r} (a a y - \frac{a a y^3}{3 b b})$. Si l'on fait $y = b$, le solide
 engendré par le quart d'ellipse sera $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} a^2 b$.
 Donc le premier solide est au second comme $b :$
 a . Si $a = b$, le quart d'ellipse deviendra un quart
 de cercle, & le solide engendré sera un hémis-
 phère $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2 a^3}{3}$.

55. PROBLEME. Trouver la surface décrite par le quart
 d'ellipse A D autour du demi-axe A C. Selon ce qu'on a
 dit ci-dessus (38), la différentielle d'un arc elliptique
 est $\sqrt{d x^2 + d y^2} = d s = \sqrt{d x^2 + \frac{b b x^2 d x^2}{a a . (a a - x x)}}$
 $= d x \sqrt{1 + \frac{b b x^2}{a a . (a a - x x)}} = \frac{d x \sqrt{a a - x x + \frac{b b x x}{a a}}}{\sqrt{a a - x x}}$
 $= \frac{d x . \sqrt{a a - x x . \frac{(a a - b b)}{a a}}}{\sqrt{a a - x x}} ;$ donc
 $y . \sqrt{d x^2 + d y^2}$ est $= y d x . \frac{\sqrt{a a - x x . \frac{(a a - b b)}{a a}}}{\sqrt{a a - x x}}$
 $= \frac{b}{a} d x . \sqrt{a a - x x . \frac{(a a - b b)}{a a}}$, en substituant la
 valeur de $y = \frac{b}{a} \sqrt{a a - x x}$; donc $\frac{c}{r} . S. y \sqrt{d x^2 + d y^2}$
 $= \frac{c b}{r a} . S. d x \sqrt{a a - x x . \frac{(a a - b b)}{a a}}$: Je prolonge
 C A en G jusqu'à ce que A G $= \frac{a a}{\sqrt{a a - b b}}$ & je

prends $Cb = b$; je décris ensuite avec les demi-axes CG , Cb , l'ellipse Gb . Maintenant faisant $CP = x$, l'ordonnée $Pu = z$, l'on aura $z^2 = \frac{bb}{(GC)^2} (GC^2 - x^2)$; or $(CG)^2 = \frac{a^4}{aa - bb}$; donc $z^2 = bb - x^2 \cdot \frac{(aa - bb) \cdot bb}{a^4}$ $= \frac{bb}{aa} \cdot \left(aa - xx \cdot \frac{(aa - bb)}{aa} \right)$; donc multipliant $Pu = z$ par dx , l'on aura l'élément de l'espace $C.b.Pu$, & cet espace sera $= \frac{b}{a} \cdot S. dx \sqrt{\left(aa - xx \cdot \frac{(aa - bb)}{aa} \right)}$; donc en menant l'ordonnée An , $\frac{c}{r} \cdot y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} \cdot S. yds$, sera $= An.BC$; c'est-à-dire, que la surface engendrée par la révolution de AD autour de CA est égale au produit de $\frac{c}{r}$ par la surface $An.bC$.

56. PROBLÈME. Trouver le solide engendré par la révolution de l'aire $ABMP$ pendant la révolution de la traîtrice autour de son asymptote (Fig. 6). Soit l'abscisse $CP = x$, $PM = y$, l'on aura (13) $dx = - \frac{dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$; donc $\frac{cy^2 dx}{2r} = - \frac{cy dy \sqrt{(aa - yy)}}{2r}$, dont l'intégrale est $= - \frac{c}{6r} \cdot (aa - yy)^{\frac{3}{2}}$. Comme le signe $-$ ne change point la valeur du solide que nous cherchons, ce solide sera $= \frac{c}{6r} \cdot (aa - yy)^{\frac{3}{2}}$. Si l'on suppose $y = 0$, le solide produit par l'aire infiniment longue de la traîtrice sera $= \frac{ca^3}{6r}$. Mais l'hémisphère produit par la révolution du quart de cercle ADB autour du rayon $DB = a$, est, comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (54), $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3 = \frac{ca^3}{r \cdot 3}$; donc cet hémisphère est au solide qu'on vient de trouver, comme $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} :: 6 : 3 :: 2 : 1$.

57. PROBLÈME. Trouver la surface décrite par l'arc AM de la traîtrice lorsqu'elle fait sa révolution autour de son af-

symptote B P. Les triangles semblables P M T , M R m donnent P M : M T :: M R = - d y : M m = d s , ou y : a :: - d y : d s , ou - a d y = y d s & $\frac{c}{r} y . d s =$

$\frac{c}{r} y . \sqrt{(d x^2 + d y^2)} = - \frac{c}{r} . a d y$, dont l'intégrale est =

$- \frac{c}{r} a y + C$. Pour déterminer la constante, je remarque

que la surface cherchée doit être = 0 , lorsque y = a ;

donc C - $\frac{c}{r} a a = 0$, ou C = + $\frac{c}{r} a a$ & l'intégrale

complète est = $\frac{c a}{r} . (a - y)$. Si l'on fait y = 0 , cette

intégrale est = $\frac{c a a}{r} = \frac{c a}{r} . a$; c'est-à-dire , que la

surface infiniment longue engendrée par la révolution de la traîtrice autour de son asymptote, est égale au produit de la circonférence d'un cercle dont le rayon seroit = a , multipliée par le même rayon , ou à la surface convexe d'un cylindre dont le rayon de la base & sa hauteur seroient égaux à la tangente de la traîtrice.

58. PROBLÈME. On demande la surface engendrée par l'arc cycloïdal D n pendant la révolution de la cycloïde autour de la tangente D F (Fig. 7). Le diamètre du cercle générateur étant supposé = 2 a , l'abscisse D P = x , la corde D M , moyenne proportionnelle entre le diamètre & l'abscisse , sera = $\sqrt{(2 a . x)}$; donc l'arc D n qui est double de cette corde (32) sera = $2 \sqrt{(2 a . x)}$; donc l'é-

lément n i est = $\frac{d x \sqrt{2 a}}{\sqrt{x}} = d s$. Si l'on fait tourner

cet élément autour de D F , il est évident que l'on

aura l'élément de la surface = $\frac{c}{r} . l n . \frac{\sqrt{(2 a)} d x}{\sqrt{x}} =$

$\frac{c}{r} . \sqrt{x} . d x \times \sqrt{2 a}$ (à cause de l n = D P = x).

Donc en intégrant , la surface cherchée sera =

$\frac{c}{r} \sqrt{2 a} . \frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3 r} . c x . \sqrt{(2 a . x)}$. Si x devient = 2 a ,

la surface décrite par la moitié D A de la cycloïde sera $= \frac{8c}{3r} \cdot aa$.

59. PROBLÈME. Que la courbe A M B (Fig. 20.), dont on a parlé dans la Première Partie de cet Ouvrage, (Courbes algébriques 119.) fasse une révolution autour de la ligne A B, on demande la valeur du solide de révolution.

L'équation de la courbe est $y^2 = \frac{a^2 x - 2 a x^2 + x^3}{2 a - x} =$

$= -x^2 - aa + \frac{2 a^3}{2 a - x}$ (en divisant, autant qu'on le peut, par $-x + 2 a$), dans laquelle A B $= a$, A P $= x$; donc $y^2 dx = -x^2 dx - a a dx + \frac{2 a^3 dx}{2 a - x}$, dont l'in-

tégrale en ajoutant une constante est $= C - \frac{x^3}{3} - a a x - 2 a^3 L. (2 a - x)$. Supposons d'abord que cette intégrale devient $= 0$, lorsque $x = 0$; dans ce cas l'on trouve $C = 2 a^3 L. 2 a$; donc l'intégrale complète ou le solide cherché engendré par l'aire A M P est $=$

$\frac{c}{2r} S. y^2 dx = \frac{c}{2r} \cdot \left(2 a^3 L. 2 a - \frac{x^3}{3} - a^2 x - 2 a^3 L. (2 a - x) \right)$

& faisant $x = a$, le solide engendré par l'aire A M B sera $= \frac{c}{r} \left(a^3 (L. 2 a - L. a) - \frac{2}{3} a^3 \right)$. Si l'on prend

les logarithmes dans une logarithmique dont la sous-tangente soit $= a$, selon ce qu'on a dit dans la première Section, il faudra diviser par a les logarithmes L. 2 a, L. a; donc alors le solide sera $= \frac{c}{r} \left(a^2 (L. 2 a - L. a) - \frac{2}{3} a^3 \right)$.

Et ainsi ce produit ne sera que de trois dimensions. Supposons ensuite que S. $y^2 dx$ est $= 0$, lorsque $x = a$, dans ce cas on aura $C = \frac{4}{3} a^3 + 2 a^2 L. a$, en prenant les logarithmes, comme on vient de le dire; donc S. $y^2 dx =$

$\frac{4}{3} a^3 + 2 a^2 L. a - \frac{x^3}{3} - a^2 x - 2 a^2 L. (2 a - x)$,

qui étant multipliée par $\frac{c}{2r}$, donnera le solide engendré

par l'aire $B m p$. Si l'on fait $x = 2a$, le solide engendré par l'aire infiniment longue $B R F D$ sera $= \frac{6}{r} \cdot (a^2 L.a - a^2 L.0 - \frac{5}{3} \cdot a^3)$: ce solide sera infini, parce que le logarithme d'une ordonnée ma (Fig. 5) infiniment petite est infini.

60. PROBLÈME. Trouver l'élément de la surface d'un cône oblique $A f B$ (Fig. 21). Supposons que ce cône soit coupé par le plan $A f B$ qui passe par un des diamètres de la base sur laquelle, prolongée s'il le faut, tombe la perpendiculaire fF . Prenons un arc infiniment petit mn (élément de l'arc Dm) dont la tangente soit TM , & supposant $CP = x$, $CA = CD = a$, & que l'on a tiré les autres lignes que représente la figure, de manière que FM soit perpendiculaire à TM , il est visible que

$\frac{mn \cdot fM}{2}$ représentera l'élément fmm de la surface cher-

chée; car le plan $M f F$ passant par la ligne fF perpendiculaire au plan de la base, sera perpendiculaire au même plan de la base; mais la tangente TM est perpendiculaire par construction, à MF , commune section du plan de la base & du plan fMF , & de plus TM se trouve dans le plan de la base; donc cette ligne est perpendiculaire au plan fMF , & par conséquent à la ligne fM hauteur du triangle nfm . Soit maintenant $CF = b$, l'angle CnT étant droit, & nP étant une perpendiculaire abaissée du sommet de cet angle, sur l'hypothénuse CT , l'on a $CP : Cn ::$

$Cn : CT$, ou $x : a :: a : CT = \frac{aa}{x}$. Mais $CT : Cn ::$

$TF : MF$, ou $\frac{aa}{x} : a :: \frac{aa}{x} + b : MF = \frac{aa + bx}{a}$. Soit

$fF = g$, l'on aura $fM = \sqrt{gg + \frac{(aa + bx)^2}{aa}}$; &

parce que l'élément de l'arc circulaire Dm , selon ce qu'on a dit ci-dessus (31), est $= \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, l'élément

$$f n m \text{ sera } = \frac{a dx \sqrt{\left(gg + \frac{(aa + bx)^2}{aa} \right)}}{2 \cdot \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{gg \cdot aa + a^4}{b^2} + \frac{2aax}{b} + xx \right)}}{2 \cdot \sqrt{(aa - xx)}} ; \text{ toutes}$$

les formules qui pourront être ramenées à celle que l'on vient de trouver, dépendront de la surface du cône oblique,

61. PROBLÈME. Trouver le solide produit par la révolution de la courbe AD (Fig. 3) autour de la ligne SV distante de l'axe DC de la quantité p . Il est visible qu'en faisant $MN = y$, l'on aura $bM = p + y$, & qu'en substituant $p + y$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{2r} y^2 dx$, le solide engendré par l'aire SDAV sera $= \frac{c}{2r} \cdot S. (y + p)^2 dx$. Mais le solide engendré par le rectangle DCVS est $= \frac{c}{2r} \cdot S. p^2 dx$, qui étant retranché du solide qu'on vient de trouver, donnera $\frac{c}{2r} S. (y + p)^2 dx - \frac{c}{2r} \times S. p^2 dx = \frac{c}{2r} \cdot S. (y^2 dx + 2pydx) \dots (A)$ pour le solide engendré par la surface CDA autour de SV.

Soit l'hyperbole équilatère AG (Fig. 11), on demande le solide engendré par le triligne bAg autour de l'axe CB. En faisant $bg = Ap = x$, $pg = y$, l'on auroit $y^2 = 2px + xx$, en supposant le demi-axe CA = p . Si l'on change y en x , en faisant $pg = CD = x$ & $bg = y$, l'on

l'on aura $x^2 = 2py + yy$ & $\frac{c}{2r}$ S. $(y^2 dx + 2py dx)$
 $= \frac{c}{2r}$ S. $x^2 dx = \frac{c}{2r} \cdot \frac{x^3}{3}$. Ainsi ce solide est égal
à un cône dont la hauteur est x & dont le rayon de la base
est aussi $= x$, car alors la base est $= \frac{c x^2}{2r}$. L'on peut re-
marquer qu'ici gm est $= dx$, & que le produit de la sur-
face que décrit nG pendant la révolution par dx ,
est l'élément du solide cherché.

62. REMARQUE I. Si l'on vouloit avoir le
solide engendré par l'aire $ABmM$ (Fig. 13.),
comprise entre deux courbes ou les deux branches
d'une même courbe, on chercheroit séparément
le solide engendré par l'aire $ABmP$ & le solide
engendré par l'aire AMP , l'on retrancheroit le
second du premier & le problème seroit résolu. Si
l'on demandoit le solide engendré par la courbe
 BmD autour d'une ligne fL , parallèle à l'axe
 AP , l'on chercheroit la valeur générale d'une or-
donnée DL , on chercheroit ensuite la valeur du
solide engendré par l'aire DmL , en ajoutant une
constante qu'on détermineroit par cette condition
que l'intégrale s'évanouiroit lorsqu'on auroit AP
 $= fm = g$, par exemple. On chercheroit en-
suite la valeur du solide produit par l'aire $f m B$, la
somme des deux solides donneroit le solide cherché;
ôtant l'un de l'autre l'on aura leur différence.

REMARQUE II. Si l'on vouloit la surface dé-
crite par l'arc Ag (Fig. 11), autour de la ligne Th ,
distante de CD , que nous pouvons regarder comme
l'axe de la courbe, de la quantité $TC = p$; en
faisant $Dg = y$, l'on auroit $hg = p + y$, &
l'on substitueroit $p + y$ au lieu de y dans la for-
mule $\frac{c}{r} y \sqrt{dx^2 + dy^2}$; de sorte que la sur-

face cherchée seroit $= \frac{c}{r} \cdot S. (p + y) \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

REMARQUE III. Si les co-ordonnées DM , AD (Fig. 22) étoient obliques, il y auroit quelque changement dans les formules. Soit l'angle des coordonnées $= z$, $AD = x$, $DM = y$, $DF = p$ & supposons que la courbe tourne autour de l'axe BF parallèle à l'axe AD , on demande la surface qu'engendrera la courbe & le solide que produira l'aire ADM . Ayant tiré ML perpendiculairement à AD , le triangle rectangle MPD , en faisant le sinus total $= r$, donne r : sinus $z :: y : PM = \frac{y \sin. z}{r}$. L'on a aussi $FD = LP = \frac{p \sin. z}{r}$; donc $LM = \frac{(p + y) \sin. z}{r}$; on a encore $PD = \frac{\cos. z \cdot y}{r}$ & $AP = x - \frac{\cos. z \cdot y}{r}$. Si dans la formule $\frac{c}{2r} S. (y + p)^2 dx$ (61) on met $\frac{(p + y) \sin. z}{r}$ au lieu de $y + p$ & la différentielle de $x - \frac{\cos. z \cdot y}{r}$ au lieu de dx , la formule A (de l'endroit cité) donnera le solide engendré par l'espace AMP autour de $BF = \frac{c}{2r} \cdot \frac{(\sin. z)^2}{r^2} \cdot S. (y^2 + 2py) \left(dx - \frac{\cos. z \cdot dy}{r} \right)$, auquel il faut ajouter le solide engendré par le triangle PMD ; c'est-à-dire $\frac{c}{2r} \cdot \frac{(\sin. z)^2}{r^2} S. \frac{\cos. z \cdot dy}{r} \cdot (y^2 + 2py)$, ainsi que nous le verrons bien-tôt & le solide cherché fera $= \frac{c \sin. z^2}{2r^3} \cdot S. (y^2 + 2py) dx$

Si l'on suppose $p = 0$, on aura le solide engendré autour de l'axe AP .

Si l'on veut avoir la surface décrite par la courbe AM , on substituera $\frac{\sin. \zeta}{r} \cdot (y + p)$

au lieu de y dans la formule $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{c}{r} y ds$, & l'on aura la surface cherchée $=$

$\frac{c \cdot \sin. \zeta}{rr} \int (y + p) ds$. Mais ici ds n'est

pas $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; mais $ds =$

$\sqrt{(dx^2 - 2 \frac{\cos. \zeta}{r} dy dx + dy^2)}$. Si l'angle ζ

étoit obtus, son co-sinus seroit négatif, & l'on changeroit le signe du second terme de la quantité sous le signe, & il est facile de voir quel changement il faudroit faire dans la formule du solide engendré par l'aire AMP . Dans le même cas le solide décrit par le triangle DMP seroit négatif; c'est-à-dire, qu'on le retrancheroit au lieu de l'ajouter.

Si dans la formule A (61), au lieu de y l'on substitue la valeur de $PM = \frac{\sin. \zeta}{r} y$; au lieu

de p , la valeur de $PL = \frac{\sin. \zeta}{r} p$; au lieu de dx , la

différentielle de $\frac{\cos. \zeta}{r} y$ (parce que $PD =$

$\frac{\cos. \zeta \cdot y}{r}$, & que $Pp = r m$ peut être regardé

comme la différentielle de PD), & qu'on regarde ζ comme constant, l'on aura le solide engendré par

le triangle $MPD = \frac{c}{2r} \times \frac{(\sin. \zeta)^2}{r^2} \int \frac{\cos. \zeta}{r}$

$dy \cdot (y^2 + 2py)$.

G 2

Si la courbe est rapportée à un foyer F (Fig. 23), pour trouver le solide produit par la révolution de l'aire ARF autour de la ligne GT , parallèle à AF , je cherche le solide élémentaire produit par le triangle infiniment petit DRF . Que la révolution se fasse par un arc infiniment petit, le point D décrira l'arc infiniment petit DP & le point F l'arc Fb . Dans ce mouvement le triangle élémentaire DFR décrira un solide, qui aura pour faces deux triangles & trois quadrilatères. Ce solide peut être représenté par la Figure 24.

Si par le point b on mène un plan qui passe par DR , ce solide sera divisé en deux pyramides, l'une triangulaire $bDRF$, l'autre quadrilatère $bDRpP$. La solidité de la première est égale au produit du triangle FDR , par le $\frac{1}{3}$ de bF . La seconde est égale au double d'une pyramide qui auroit FDR pour base & DP pour hauteur; ce que l'on comprendra aisément, en concevant le plan bPR qui la divise en deux pyramides qui ont même sommet b , & dont les bases sont chacune la moitié du rectangle $PpDR$; mais d'ailleurs la pyramide $bPpR$ a aussi $pR = PD$ pour hauteur & le triangle $bPp = FDR$ pour base. Donc la seconde pyramide est les $\frac{2}{3}$ du produit de FDR par DP ; donc le solide élémentaire est $\equiv FDR \cdot \frac{(Fb + 2 \cdot DP)}{3}$; donc lorsque la révolution sera entière, le solide élémentaire sera égal au produit de $\frac{FDR}{3}$ par la circonférence décrite par F , plus le double de la circonférence décrite par le point D .

Soit $FD = y$, l'arc gh (décrit avec le rayon $Fg = a$) $\equiv z$; donc $hL = dz$. Si l'on fait l'arc Dm (décrit du centre F avec le rayon y)

$\equiv dx$, l'on aura $a : dz :: y : dx \equiv \frac{y dz}{a}$. Multipliant cet arc par $\frac{1}{2} y$, l'aire $F D m$, ou $F D R$ fera $\equiv \frac{1}{2} \frac{y^2 dz}{a}$. De plus le triangle rectangle $F B D$ donne $a : \sin. z :: y : B D \equiv \frac{\sin. z \cdot y}{a}$. Si l'on fait $B G = p$, la circonférence décrite par $T F$ sera $\equiv \frac{c p}{r}$, & la circonférence décrite par le point D autour de $G T$ sera $\equiv \frac{c}{r} \cdot (p + \frac{\sin. z}{a} \cdot y)$, & parce que l'aire $F D R$ est $\equiv \frac{1}{2} y dx$, l'élément produit par cette aire dans une révolution entière sera $\equiv \frac{1}{2} y dx \times \frac{1}{2} \cdot (\frac{c p}{r} + \frac{2 c p}{r} + \frac{2 c \sin. z \cdot y}{r a}) \equiv \frac{1}{2} y dx \times (\frac{c p}{r} + \frac{2 c \sin. z \cdot y}{3 r \cdot a})$. Si on substitue $\frac{y dz}{a}$, au lieu de dx , le solide de révolution fera, en supposant $a \equiv r$, fera, dis-je, $\frac{c}{3 r} \cdot S. (\frac{3 p}{2 r} y^2 dz + \frac{y^3 \sin. z \cdot dz}{r^2})$. Si l'aire $A F D$ tourne autour de la ligne $A F$, l'on aura $p = 0$, & le solide de révolution sera $\equiv \frac{c}{3 r} \cdot S. y^3 \frac{\sin. z \cdot dz}{r^2}$.

Soit $A i$ (Fig. 3) $\equiv z$ un arc de cercle dont le rayon soit $\equiv r$, les triangles $C i H$, $i r l$ ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables; donc $C i : i H :: i r \equiv dz : i l \equiv H h$. Or, $H h$ est la différentielle du co-sinus de l'arc z & $i H$ est le sinus de z ; donc $r : \sinus z :: dz : -d. \text{co-sinus} \equiv \frac{\sin. z \cdot dz}{r}$. On met le signe $-$, parce que le sinus augmentant, le co-sinus dimi-

nue. Substituant la valeur de $\frac{\sin. z \cdot d z}{r}$ dans la

dernière formule, elle deviendra $= \frac{c}{3r} \times$

$$S. - y^3 \frac{d \cdot \cos. z}{r}.$$

63. PROBLÈME. Supposant que AD (Fig. 23) est un arc de cercle dont le rayon FA soit $= r$, on demande le solide engendré par le secteur ADF autour du rayon AF. Dans ce cas on a FD $= y = r \&$

la formule $\frac{c}{3r} \cdot S. - y^3 \frac{d \cdot \cos. z}{r}$ est $=$

$$\frac{c}{3r} \cdot S. - r^3 \frac{d \cdot \cos. z}{r} = \frac{cr}{3} \cdot S. - d \cdot \cos. z$$

$$= \frac{cr}{3} \cdot \cos. z + C. \text{ Pour déterminer la}$$

constante C, je remarque qu'en supposant le cosinus de $z =$ au rayon, l'arc AD fera $= 0$, aussi bien que le solide de révolution; donc $=$

$$\frac{cr}{3} + C = 0, \text{ ou } C = - \frac{cr^2}{3}; \text{ donc le}$$

$$\text{solide cherché est } = \frac{c}{3r} \times (r^3 - r^2 \cos. z).$$

DU CENTRE DE GRANDEUR, OU DU CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES.

64. Si les centres de deux corps sphériques a & b (Fig. 25) sont attachés aux extrémités d'une ligne ab (qu'on peut considérer sans pesanteur & comme inflexible), ces corps seront en équilibre, pourvu que la ligne ou le levier ab soit soutenu par un point f tel que l'on ait $a : b :: bf : af$, ou pourvu que les distances de ces corps au point d'appui soient en raison inverse de ces corps; nous considérons ici les corps, comme si toute leur matière étoit réu-

nie au centre de ces corps. La démonstration de ce principe, regardé chez les Méchaniciens comme une vérité incontestable, se trouve dans les Livres les plus élémentaires de Méchanique. Si le corps a pèse une livre, & le corps b deux livres, la distance af sera double de la distance fb .

65. PROBLÈME. Diviser une ligne $ab = c$ en raison de deux quantités a & b . J'appelle x la partie de la ligne qui répond à la quantité a , $c - x$ fera la distance fb qui répond à b . Par la nature du Problème l'on a $a : b :: c - x : x$; donc $ax = bc - bx$, ou $ax + bx = bc$, ou $x =$

$\frac{b \cdot c}{a + b}$. Donc on trouvera x en faisant $a + b :$

$b :: c : x$; c'est-dire, que la distance ou la partie de la ligne qui répond au poids a , se trouve en prenant le quatrième terme d'une proportion dont le premier terme est la somme des poids, le second est le poids b , & le troisième la ligne donnée c .

L'on aura $c - x = c - \frac{b \cdot c}{a + b} =$

$\frac{ca + cb - bc}{a + b} = \frac{ac}{a + b}$; donc $a + b : a ::$

$c : c - x$; c'est-à-dire, que l'on trouvera la distance de chaque poids au point d'appui, en disant, la somme des poids est à un de ces poids, comme la longueur du levier est, à la distance de l'autre poids au point d'appui. Si on suppose a de trois livres, b de douze livres, & la ligne ab de six pieds, la première proportion donnera $12 + 3 = 15 : 12 :: 6 \text{ Pieds} : x = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5} \text{ Pieds}$ + $\frac{4}{5}$ de pied.

La *masse* d'un corps est la quantité de matiere qu'il contient. L'on appelle *centre de masse*, *centre*

de grandeur, centre de gravité, un point par lequel ce corps étant suspendu, il demeure en repos, de quelle manière que les autres parties soient situées. Toute ligne horizontale qui passe par le centre de gravité du corps sera appelée *axe d'équilibre*.

Un corps m (Fig. 26) suspendu à l'extrémité a d'un levier, agit avec d'autant plus de force que la distance de la direction $a m$ (de ce corps vers le centre de la terre), au point d'appui f est plus grande, & l'on appelle *moment du corps* le produit de la masse de ce corps par la distance $a f$ de sa direction $a m$ (vers la terre.)

Les distances auxquelles les corps terrestres peuvent agir les uns sur les autres par le moyen des machines sont assez petites pour que l'on considère les directions de ces corps vers la terre comme parallèles; & la pesanteur des corps sur les plus hautes montagnes & les vallons les plus profonds, étant sensiblement la même, on peut dans la mécanique considérer la pesanteur comme uniforme, lorsqu'il s'agit des corps situés sur la surface ou auprès de la surface de la terre.

66. THÉORÈME. Si plusieurs corps m, p, R, n sont attachés à une ligne ab , supposée inflexible & sans pesanteur, & que cette ligne soit soutenue ou suspendue par un point f , de manière que la somme des produits des masses, chacune multipliée par la distance de son point de suspension au point f d'un côté, soit égale à la somme de pareils produits de l'autre côté, ces corps seront en équilibre. Sçavoir, si $m . af + p . cf = n . bf + R . gf$.

La force du corps m , pour faire tourner la ligne ab autour du point f est d'autant plus grande que la distance af est plus grande, de manière que

si cette distance devenoit double ou triple , cette force deviendroît aussi double ou triple , ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre par l'expérience. Cette force est aussi d'autant plus grande que la masse du corps m , qui est toujours comme le poids de ce corps , est plus grande. Donc la force de ce corps par rapport au point f , est toujours comme le produit $m . a f$; de même la force du corps p est toujours comme le produit $c f$ par la masse p & ainsi des autres ; donc $m . a f + p . c f$ exprime la force qui tend à faire tourner la ligne $a b$ d'un côté , & $R . g f + n . b f$, celle qui tend à faire tourner la même ligne du côté opposé ; donc si ces forces sont égales , il y aura équilibre.

Le point f est le centre commun de gravité des corps m , p , R , n .

67. Soit maintenant deux masses quelconques a & b (Fig.25) ramassées en a & b ; & supposons qu'on ait divisé (65) ab en f en raison inverse des masses a & b . Soit imaginé un plan représenté par la ligne MN , sur lequel on ait tiré des perpendiculaires des points a , f & b . Je dis que l'on aura l'équation $a . a M + b . N b = (a + b) . f P$. Ayant tiré la ligne $h f L$ parallèle au plan MN & qui rencontre les lignes $M a , N b$, prolongées s'il le faut , les triangles semblables $b f L , a f h$, donneront $b f : a f :: b L : a h$. Mais par la supposition $b f : a f :: a : b$; donc $a : b :: b L : a h$; donc $a . h a = b . L b$. Mais $a . h a$ est la différence du produit $a . f P$, au produit $a . a M$, & $b . B L$ est la différence du produit $b . b N$ au produit $b . f P$; donc on a la proportion arithmétique $a \times M a . a \times f P : b \times f P . b \times b N$; donc $a \times M a + b \times b N = (a + b) \times f P$.

COROLLAIRE. Donc la somme des produits des quantités a & b , par leurs distances au plan MN , sera égale au produit de la somme des quantités par la distance du point f au même plan ; c'est donc la même chose que si ces quantités étoient ramassées au point f .

68. Ajoutons maintenant une troisième masse m . Qu'on joigne les points m & f par une ligne qu'on divisera en F de manière que $a + b : m :: mF : Ff$; c'est-à-dire, qu'on divisera (65) la ligne fm en raison inverse de $a + b$ & de m , & supposant tirées les lignes mn , FR perpendiculaires au plan MN , je dis que l'on aura $a \times aM + b \times bN + m \times nm = (a + b + m) \times FR$. Si l'on conçoit les masses a & b comme ramassées en f , ou comme une seule masse située en f , selon ce qu'on vient de dire (67), l'on a $(a + b) \times fP + m \times nm = (a + b + m) \times FR$. (Ici $a + b$ est regardé comme une seule masse) ; mais l'on a (67) $(a + b) \times fP = a \times aM + b \times bN$; donc $a \times aM + b \times bN + m \times nm = (a + b + m) \times FR$. C'est pourquoi que les trois corps a , b , m soient placés en a , b , m , ou qu'ils soient assemblés en F , la somme des produits de ces corps par leurs distances au plan MN , sera toujours la même.

En suivant la même méthode, on prouvera que si l'on ajoute un quatrième corps D , & qu'on tire la ligne DF , & qu'on la divise de manière que l'on ait $a + b + m : D :: DG : FG$, la somme des rectangles, ou, ce qui revient au même, la somme des produits des quatre corps par leur distance au plan, est égale à un seul produit fait de la somme de ces corps, par la distance GS du point G au plan ; & parce qu'on peut prouver

la même chose pour un nombre quelconque de corps, il est évident que quelque nombre de corps que l'on ait, l'on peut toujours trouver un point tel que le produit de la somme de tous les corps par la distance de ce point à un plan quelconque, soit égal à la somme des produits particuliers de chacun de ces corps par la distance de chacun au même plan. Ce point est appelé le *centre de masse*, le *centre de grandeur*, le *centre de gravité*. Si quelques-uns de ces corps étoient situés de l'autre côté du plan, leurs distances devroient être regardées comme négatives, & les produits de ces corps par leurs distances feroient pris avec le signe —. Si le plan passe par le centre de grandeur, la distance de ce point au plan étant $= 0$, la quantité qui représente la somme du produit de ces corps situés d'un côté, doit être égale à celle qui représente la somme négative des produits de ces corps situés de l'autre côté.

L'équation $a \cdot aM + b \cdot bN + m \cdot nm = (a + b + m) \cdot FR$, donne $FR = \frac{a \cdot aM + b \cdot bN + m \cdot nm}{a + b + m}$. C'est-à-dire, la dis-

tance du centre de gravité F de trois corps à un plan est égale à la somme des rectangles de chacun de ces corps par sa distance au même plan, divisée par la somme de ces corps. Et en général quelque soit le nombre des corps, la distance de leur centre de gravité à un plan, est égale au quotient de la somme des produits, ou rectangles de chacun des corps par leurs distances particulières, en divisant par la somme des corps : on prendra avec le signe — les produits dans lesquels les distances seront négatives. On peut dire aussi que la

distance du centre de gravité d'un système de corps par rapport à un plan , est égale au quotient de la somme des *momens* de ces corps par rapport au plan donné *, divisée par la somme de ces corps.

Mais on peut demander , si pour un assemblage ou système de corps quelconque , ce point qu'on appelle centre de gravité , est déterminé & unique. Je dis qu'il est unique ; en effet , si l'on conçoit trois plans perpendiculaires l'un à l'autre , on trouvera la distance du centre de gravité , par rapport à chacun de ces plans , en divisant la somme des rectangles de chacun des corps par leurs distances particulières à chaque plan , en divisant , dis-je , cette somme par la somme des corps. Si l'on suppose maintenant que l'on mène trois autres plans parallèles aux premiers & à la distance trouvée , il est visible que le centre de gravité se trouvera dans ces trois plans. Donc il sera situé dans la section des trois derniers plans , section qui est évidemment un point ; donc &c.

Lorsqu'il s'agit de lignes , on peut les concevoir comme l'assemblage d'une infinité de points pesans. L'on peut aussi considérer une surface comme l'assemblage d'une infinité de lignes pesantes. Si les centres des corps dont on cherche le centre de

* Le *moment* d'un corps par rapport à un plan , est le produit de ce corps par sa distance au plan. Si le corps commençoit à se mouvoir en faisant tourner le plan , sa vitesse respectivement à un autre corps situé sur la même ligne , seroit d'autant plus grande , que sa distance au plan seroit plus grande , & sa force en seroit aussi d'autant plus grande. De plus la force est d'autant plus grande que le corps est plus grand.

grandeur sont situés dans un même plan , on tirera dans ce plan deux lignes perpendiculaires entre elles , & l'on cherchera la somme des momens de de ces corps par rapport à ces lignes. On divisera ces sommes par la somme des corps ; les quotients indiqueront la distance du centre de grandeur par rapport à chacune de ces lignes ; donc en tirant deux autres lignes parallèles aux premières & à la distance trouvée , le centre de grandeur se trouvera dans ces deux lignes , & par conséquent il sera situé dans l'intersection de ces lignes.

La considération du centre de grandeur appartenant à la géométrie , il n'est pas surprenant que nous nous en occupions ici. Nous nous servirons cependant de la dénomination du centre de gravité à cause de l'usage qu'on en pourra faire ailleurs.

69. PROBLÈME. *Trouver le centre de gravité d'un triangle abc (Fig. 27).* Je tire par le sommet de ce triangle la ligne gb parallèle à la base ac . Je tire aussi la ligne $bf \perp c$, perpendiculaire à la base & la ligne $bD \perp a$, qui partage la base en deux également , & supposant les lignes mn, rs parallèles à la base , je fais $bg \perp b$, $bp \perp x$, $ip \perp dx$. A cause des parallèles ac, mn , il est visible que les hauteurs des triangles abc, bmn sont entre elles comme les bases ac & mn ; donc

$c : b :: x : mn \perp \frac{bx}{c}$; multipliant mn par dx ,

l'on aura l'élément $mnr s \perp \frac{bx}{c} \cdot dx$. Si l'on multiplie cet élément par la distance x à la ligne bg ,

l'on aura le moment de cet élément $\perp \frac{bx^2 dx}{c}$, &

$\frac{b x^3}{3c}$ sera la somme des momens des élémens du triangle $b m n$. Si l'on divise cette somme par celle des élémens, ou par $S. \frac{b x d x}{c} = \frac{b x^2}{2c}$, le quotient $\frac{2}{3} x$ donnera la distance du centre de gravité du triangle $b m n$ à la ligne $g b$. Si l'on fait $x = c$, le centre de gravité du triangle $a b c$ sera éloigné de b de la distance $b p = \frac{2}{3} \cdot c$. Maintenant la ligne $b D$ divisant la base $a c$ en deux également, divisera aussi les lignes $m n, r s$ en deux également; donc il est visible que cette ligne divise les élémens du triangle en deux également; donc le centre de gravité de ces élémens se trouve sur cette ligne; mais les triangles semblables $b D f, b L p$, donnent $b f = c : b p = \frac{2}{3} c :: b D = a : L b = \frac{2}{3} a$. Donc si du sommet d'un angle quelconque d'un triangle, on mène une ligne qui coupe le côté opposé que j'appelle la base du triangle, en deux également, le centre de gravité du triangle se trouvera sur cette ligne & sera éloigné de la base, du $\frac{2}{3}$ de cette ligne.

REMARQUE I. Il est visible que le centre de gravité se trouve sur une ligne ou sur un plan qui partage en deux également les élémens de la figure.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le centre de gravité d'un quadrilatère $a b f c$ (Fig. 28), on chercheroit les centres de gravité m, L des triangles $b f c, b a c$, l'on meneroit la ligne $m L$ qu'on diviserait en P , en raison inverse des aires de ces triangles, le point P seroit le centre de gravité cherché.

Si le quadrilatère étoit un parallélogramme, en tirant la ligne RT, par le centre de gravité des bases du parallélogramme, il est visible que cette ligne diviserait en deux parties égales, les élémens du parallélogramme, & que le centre de gravité se trouveroit au milieu de cette ligne. Ce seroit la même chose, si la figure $abcf$ étoit un prisme ou un cylindre. L'on voit aussi facilement que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de cette droite.

70. PROBLÈME. Trouver la distance du centre de gravité d'une demi-parabole AFD d'un genre quelconque, par rapport à la tangente AT perpendiculaire à l'axe AF (Fig. 29). L'équation $a^{m-1}x = y^m$ pouvant représenter toutes les paraboles, l'on a en faisant $a = 1$, $x = y^m$, $dx = m \cdot y^{m-1} dy$. Multipliant y par dx , l'on a l'élément de la demi-parabole $= y dx$; & multipliant cet élément par la distance x à la ligne TL, l'on a le moment de cet élément $= yx dx = y \cdot y^{\frac{m}{m-1}} m \cdot y^{m-1} dy = m y^{\frac{2m}{m-1}} dy$, dont l'intégrale $\frac{m}{1+2m} \cdot y^{\frac{2m}{m-1}+1}$ divisée par la somme des élémens $S. y dx = S. m y^{\frac{m}{m-1}} y \cdot dy = S. m y^{\frac{2m}{m-1}} dy = \frac{m}{m+1} y^{\frac{2m}{m-1}+1}$

donne $\frac{1+m}{1+2m} \cdot y^{\frac{2m}{m-1}+1} = \frac{1+m}{1+2m} x$, pour la distance demandée. Si l'on fait $AP = AF = a$, l'on aura la distance du centre de gravité de la demi-parabole à la tangente $AL = \frac{1+m}{1+2m} \cdot a$.

Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on a $\frac{2}{3} a$ pour la distance cherchée.

Si l'on veut avoir la distance du même centre de gravité, par rapport à l'axe AF , on considérera que l'élément $p P M i = y dx$ a son centre de gravité au milieu de $rs = y$; donc en multipliant $y dx$ par $\frac{1}{2} y$, l'on aura le moment de cet élément par rapport à l'axe $AF = \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{m}{2} y^{m+1} dy$; donc la somme des momens divisés par la somme $S. y dx$ des élémens sera égale à $\frac{\frac{m}{2} y^{m+1}}{\frac{1}{4} + \frac{2m}{1+m} y^{m+1}}$ divisé par $\frac{m}{1+m} y^{m+1}$, ou sera égale à $\frac{1+m}{4 + 2m} y$. Si l'on fait $AP = \frac{1+m}{1 + 2m} a$, & la perpendiculaire $PC = \frac{1+m}{4 + 2m} \cdot FD$, le point C sera le centre de gravité cherché, il est visible que le centre de gravité de la demi-parabole ABF sera situé en g , en faisant $Pg = PC$; donc le centre de gravité de la parabole entière BAD sera situé en P .

71. PROBLÈME. Trouver la distance du centre de gravité du paraboloidé BAD (formé par la révolution d'une parabole quelconque autour de son axe), au sommet A (Fig. 29). Si dans la formule $\frac{c}{2r} y^2 dx$, l'on substitue la valeur de dx , prise de l'équation $x = y^m$, l'on aura l'élément du paraboloidé $= \frac{c}{2r} m y^{m+1} dy$. En multipliant cet élément par $y^m = x$, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{m \cdot c}{2r} y^{2m+1} dy$. Divisant

la

la somme $\frac{m}{2+m} \cdot \frac{c}{2r} y^{m+2}$ des momens par la somme des élémens $\frac{m}{m+2} \cdot \frac{c}{2r} y^{m+2}$, l'on aura la distance cherchée $= \frac{2+m}{2+m} y^m = \frac{2+m}{2+m} x$. Si l'on fait $x = AF = a$, cette distance sera $= \frac{2+m}{2+m} a$. Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on aura la distance cherchée en prenant $AP = \frac{4}{3} a = \frac{2}{3} a$.

72. PROBLÈME. Trouver le centre de gravité d'un solide engendré par une demi-parabole ordinaire ADF autour de la tangente TL (Fig. 29). Il est visible que le centre de gravité est situé sur la tangente AL*. Soit supposée AF = a, & la circonférence décrite avec ce rayon égale à c, on aura la circonférence décrite avec le rayon AP = x, en faisant $a : c :: x : \frac{c \cdot x}{a}$. Si on multiplie cette circonférence par PM = y, l'on aura la surface cylindrique décrite par MP pendant la révolution $= \frac{c \cdot x \cdot y}{a}$. Si l'on multiplie cette quantité par Pp = dx, l'on aura l'élément cy-

* Lorsque le point dans lequel se trouve le centre de gravité n'est pas un point de la figure, on peut supposer que le corps soit suspendu par ce point, en concevant que ce point est attaché au corps par des lignes inflexibles.

l'indrique du solide de révolution $\equiv \frac{cxydx}{a}$. L'équation $px \equiv y^2$ de la parabole donnée $y \equiv p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc l'élément du solide est $\equiv \frac{c}{a} \times p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$. Si l'on multiplie cet élément par $\frac{1}{2} \cdot y \equiv \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, par la distance de son centre de gravité au cercle décrit par AF, l'on a le moment de cet élément (par rapport à AF) $\equiv \frac{cp x^2 dx}{2a}$.

Si l'on divise la somme des moments $\frac{cp x^3}{6a}$, par la somme des éléments $\frac{2cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{5a}$, l'on a $\frac{1}{12} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{12} y$. Si l'on fait $FD \equiv b$ & $y \equiv b$, & que l'on prenne $AL \equiv \frac{1}{12} \cdot b$, le point L sera le centre de gravité cherché.

73. PROBLÈME. Supposant que la courbe BAD (Fig. 29) est une portion d'ellipse, on demande le centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe AP. Il est visible que le centre de gravité est situé sur l'axe de la courbe. Si l'on fait le paramètre de la courbe $\equiv p$, le grand axe $\equiv a$, l'abscisse AP $\equiv x$, l'ordonnée PM $\equiv y$, selon ce qu'on a dit dans les Sections-Coniques, l'on a l'équation $y^2 \equiv \frac{p}{a}(ax - xx)$. Si la courbe étoit une hyperbole, l'on auroit $y^2 \equiv \frac{p}{a}(ax - \text{--} xx)$. En faisant AF $\equiv r$ & la circonférence décrite avec le rayon AF

$\equiv c$, l'on aura la circonférence décrite avec le rayon $y \equiv \frac{cy}{r}$, & la surface du cercle auquel appartient cette circonférence $\equiv \frac{cy^2}{2r}$. Multipliant cette surface par dx , l'on a l'élément du solide engendré par le plan A P M $\equiv \frac{cy^2 dx}{2r} \equiv \frac{c \cdot p}{2ra} \times (ax dx - x^2 dx)$, en substituant la valeur de y^2 . Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie cet élément par la distance A P $\equiv x$ à la ligne T n, l'on aura le moment de cet élément $\equiv \frac{c p}{2ra} \times (ax^2 dx - x^3 dx)$, dont l'intégrale $\frac{c p}{2ra} \times \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)$ fera la somme des momens, qui étant divisée par la somme des élémens, $\frac{c p}{2ra} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$, donnera la distance cherchée $\equiv \frac{\frac{a}{3}x - \frac{x^2}{4}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}} \equiv \frac{4ax - 3x^2}{3a - 2x} \equiv \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$, lorsqu'il s'agira du solide engendré par le plan A P M ; donc on aura cette distance en faisant $6a - 4x : 4a - 3x :: x : \text{à la distance cherchée}$.

74. COROLLAIRE. Si l'on suppose $x \equiv \frac{1}{2}a$, cette distance fera $\equiv \frac{\frac{1}{4}a^2}{4a} \equiv \frac{1}{16}a$. Si $x \equiv a$, cette distance fera $\equiv \frac{aa}{2a} \equiv \frac{1}{2}a$. C'est-à-dire,

que la distance du centre de gravité d'un demi-ellipsoïde engendré par le plan d'une ellipse autour de son grand axe par rapport à la tangente au sommet A, est égale à $\frac{5}{16}$ de cet axe, & la distance du centre de gravité de l'ellipsoïde entier est au milieu de l'axe.

75. PROBLÈME. Si la courbe BAD est un arc de cercle, on demande la distance du centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe AP, par rapport à la ligne, ou si l'on veut au plan Tn (Fig. 29). Si l'on fait le paramètre $p = a$, l'équation à l'ellipse deviendra $y^2 = ax - x^2$ qui est l'équation du cercle. Donc l'élément

$$\frac{c p}{2 r a} (a x dx - x^2 dx) \text{ qu'on a trouvé dans le}$$

$$\text{problème précédent sera } = \frac{c}{2 r} (a x dx - x^2 dx),$$

$$\text{\& le moment de cet élément } \frac{c p}{2 r a} (a x^2 dx - x^3 dx)$$

$$\text{sera } = \frac{c}{2 r} (a x^2 dx - x^3 dx), \text{ \& en divisant la somme des momens par celle des élémens, on}$$

$$\text{aura la distance cherchée } = \frac{4 a x - 3 x^2}{6 a - 4 x}.$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{2} a$, cette distance sera $= \frac{5}{16} a$, & si l'on fait $x = a$, la distance deviendra $= \frac{1}{2} a$.

Ainsi, si une sphère & un sphéroïde elliptique ont un même axe, l'hémisphère & le demi-conoïde elliptique, la sphère & le sphéroïde elliptique auront le même centre de gravité.

76. PROBLÈME. Supposant que la courbe BAD est une hyperbole, dont AF soit l'axe, on demande la distance à la ligne Tn, du centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan APM autour de l'axe

AF (Fig. 29). L'équation à l'hyperbole étant $y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2)$, l'élément du solide de révolution sera $\frac{cp}{2ra}(axdx + x^2dx)$, on suppose que AF est le prolongement du premier axe de l'hyperbole, & le moment de cet élément sera $= \frac{cp}{2ra}(ax^2dx + x^3dx)$; donc en divisant la somme des momens par celle des élémens, l'on aura la distance cherchée $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$. Si $x = a$, la distance cherchée sera $= \frac{7aa}{10 \cdot a} = \frac{7}{10} \cdot a$.

77. PROBLÈME. Trouver la distance du centre de gravité d'un arc Mm (Fig. 30), dont le rayon est $= a$, & dont la corde est parallèle à la ligne TT, qui passe par le centre du cercle. Si l'on mène la ligne AB par le milieu de l'arc, & qu'on conçoive les points n & N comme des poids suspendus aux extrémités du levier Nn soutenu en i par la ligne AB, il est évident que le centre de gravité des points n & N sera situé sur la ligne AB & ce sera la même chose pour les points M & m & tous les autres points correspondans de l'arc MBm. Soit maintenant l'arc MB $= mB = z$, l'on aura $2dz$ pour la différentielle de l'arc donné. Si l'on multiplie cette différentielle par $Ai = x$, ou par la distance du centre de gravité des deux élémens situés en n & N, ou si l'on multiplie $2dz$ par x , l'on aura le moment de l'arc MBm $= 2xdz$. Mais (Fig. 3) par la nature du cercle, en faisant CH $=$

x , $Ci = a$, $Hi = y$, $ir = dz$, les triangles irl , CHi (semblables parce que leurs côtés sont perpendiculaires) donnent $ir = dz : lr = dy :: Ci : CH$; donc $dz = \frac{a dy}{x}$, ou $x dz = a dy$, $2x dz = 2a dy$; donc si l'on divise la somme des momens $S. 2x \cdot dz = S. 2a \cdot dy = 2ay$ par la somme des élémens $S. 2 dz = 2z$, l'on aura $\frac{2ay}{2z}$ pour la distance cherchée.

COROLLAIRE. Donc (Fig. 30) $2z :: 2y = Mm :: a : Ai$, distance cherchée ; c'est-à-dire, un arc est à sa corde, comme le rayon est la distance du centre de gravité de cet arc au centre du cercle. Si l'arc est une demi-circonférence l'on aura la demi-circonférence est au diamètre comme le rayon est à la distance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle. Si l'arc est la circonférence entière, alors on a $y = 0$, & $\frac{2ay}{2z} = 0$; c'est-à-dire, que le centre de gravité de la circonférence du cercle est situé dans le centre même du cercle.

78. PROBLÈME. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide.* Je conçois un plan TT parallèle à la base & qui passe par le sommet A de la pyramide (Fig. 31). Je tire la ligne AC par le centre de gravité de la base ; il est visible que cette ligne passe aussi par le centre de gravité de la section Mfm faite parallèlement à la base, & que les plans Mfm , BFD sont semblables. Faisons donc $AP = x$, $Pp = dx$, $AC = a$, & le plan de la base $= b^2$, il est clair que les plans Mfm , BFD sont entre eux comme les quarrés des lignes AP & AC ;

donc $aa : bb :: x^2 : \text{au plan } Mfm = \frac{bbx^2}{aa}$.

Multipliant ce plan par dx , l'on aura l'élément de la pyramide $= \frac{bbx^2dx}{aa}$, & multipliant cet élé-

ment par x , l'on aura le moment de cet élément (par rapport au plan TT) $= \frac{b^2x^3dx}{a^2}$. Divisant la

somme $\frac{b^2x^4}{4a^2}$ des momens, par $\frac{b^2x^3}{3a^2}$, somme des

éléments, l'on a $\frac{3x}{4}$ pour la distance du centre de gravité de la pyramide $AMfm$ au plan TT. Si l'on fait $x = a$, la distance du centre de gravité de la pyramide entière sera $= \frac{3}{4}a$. Prenant donc $AP = \frac{3}{4}a$, le point P sera le centre de gravité de la pyramide. Si la ligne AC n'étoit pas perpendiculaire à la base, on mèneroit Ac perpendiculairement à cette base, & faisant $Ac = g$, $An = x$, $nL = dx$, on prouveroit facilement que le centre de gravité de la pyramide entière est éloigné du plan TT de la quantité $An = \frac{3}{4}g$. Si l'on joint ensemble les points c & C , n & P , les triangles semblables ACc , APn donneront $g : \frac{3}{4}g :: a : AP = \frac{3}{4}a$. Mais le centre de gravité de la pyramide est situé dans la ligne AC qui passe par les centres de tous les éléments; donc il est situé en P.

COROLLAIRE. Donc le centre de gravité d'un cône est situé sur l'axe de ce cône aux $\frac{3}{4}$ de cet axe, à compter depuis le sommet; car le cône

est une pyramide dont la base est circulaire. Ce seroit la même chose si la base de ce cône étoit une ellipse, alors on auroit un cône qu'on pourroit appeller *cône elliptique*.

79. PROBLÈME. *Trouver la distance du centre de gravité de la surface sphérique MAN (produite par la révolution de l'arc AM autour du diamètre AB) au plan TT perpendiculaire au sommet du diamètre AB (Fig. 32).* Soit le diamètre $AB = 2a$, l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée PM , ou iL , ou pm (car toutes ces ordonnées étant infiniment proches sont censées égales) $= y$, l'arc infiniment petit Mm fera (selon ce qu'on a dit

ci-dessus 31) $= \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Si l'on con-

çoit que cet arc tourne autour de l'axe, il engendrera une zone dont le centre de gravité sera situé évidemment sur cet axe, l'élément de la sur-

face fera (43) $= \frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{c}{r} y \cdot \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (puisque $Mm =$

$\frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$) $= \frac{c}{r} \cdot a dx \cdot \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$,

(en substituant la valeur de y) $= \frac{c a dx}{r}$. Si l'on

multiplie cet élément par la distance $AP = x$ au plan TT , le moment de cet élément fera $=$

$\frac{c}{r} a x dx$. Si l'on divise la somme $\frac{c}{2r} a x^2$ des

momens par la somme $\frac{c}{r} \cdot a x$ des élémens, l'on

aura la distance cherchée $= \frac{1 \cdot x}{2}$; c'est-à-dire, que

la distance du centre de gravité d'une surface sphérique MAN, par rapport au sommet A du diamètre, sera située au milieu de la hauteur de cette surface.

Si l'on comptoit les abscisses du centre, & qu'on demandât la distance du centre de gravité de la zone MfgN par rapport au centre C, on auroit $CP = x$

& l'élément de l'arc du cercle $mM = \frac{a dx}{\sqrt{aa - xx}}$

(par le N°. 31), $y = \sqrt{aa - xx}$, & l'expression

de l'élément de la zone seroit $\frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$= \frac{c}{r} \cdot a \cdot dx$; le moment de cet élément se-

roit $\frac{c}{r} \cdot a \cdot x dx$, & la distance cherchée $=$

$$\frac{\frac{c}{r} \int a x dx}{\frac{c}{r} \int a dx} = \frac{x}{2}. \text{ Mais } CP = x \text{ est la}$$

hauteur de la zone; donc le centre d'une zone sphérique, comprise entre deux plans parallèles, dont l'un passe par le centre du cercle générateur est au milieu de la hauteur de la zone.

COROLLAIRE. Il est aisé de voir que la distance du centre de gravité au centre de la sphere doit toujours augmenter de la moitié de la hauteur dont la zone augmente; ce qui ne peut être, à moins que le centre de gravité d'une zone quelconque ne soit situé au milieu de cette zone; car supposons que la hauteur Cp soit d'un pied, la distance du centre de gravité de cette zone, par rapport au centre, sera d'un demi-pied. Si on ajoute une autre zone dont la hauteur Pp soit aussi d'un pied, la distance du centre de gravité de la zone totale sera

maintenant d'un pied ; donc le centre de gravité de la zone ajoutée étoit au milieu de cette zone , puisque le centre de gravité des deux zones (égales en surface , parce qu'elles ont même hauteur) se trouve au point qui répond à la jonction des deux zones.

80. PROBLÈME. Trouver la distance du centre de gravité d'un secteur circulaire AMm (Fig. 30) par rapport au centre A du secteur. Ayant tiré les rayons An , At infiniment proches du rayon AM , le triangle AMn aura son centre de gravité situé sur la ligne At qui divise la base Mn en deux également ; & cette distance par rapport au sommet A sera $\equiv \frac{2}{3} At \equiv \frac{2}{3} a$, en faisant $At \equiv a$; c'est une suite de ce qu'on a dit ci-dessus (69) ; donc si l'on conçoit le secteur divisé en une infinité de pareils triangles, tous ces triangles auront leur centre de gravité à la même distance du sommet A ; donc si du point A pris pour centre avec un rayon $Ab \equiv \frac{2}{3} a$, l'on décrit un arc de cercle bf , tous les centres de gravité de ces triangles seront situés sur cet arc ; donc le centre o de gravité du secteur fera le même que celui de l'arc bf ; or nous avons vu (77), qu'on a déterminé le centre de gravité d'un arc en faisant l'arc est à la corde, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle ; donc l'arc bf : $bf :: Ab \equiv \frac{2}{3} a : Ao$, distance cherchée.

81. REMARQUE. Il n'est pas difficile de trouver des formules générales pour la distance du centre de gravité des surfaces & des solides de révolution, par rapport à une ligne ou à un axe quelconque. Soit AB l'axe d'une courbe quelconque (Fig. 32), l'élément Mm de l'arc AM sera $\equiv ds$, en faisant cet arc $\equiv s$, le centre de gravité de l'arc Mm sera situé au milieu L de cet arc. La distance Li à l'axe

de révolution étant exprimée par y , le moment de cet arc sera $\Rightarrow yds$. Si l'on fait $\Rightarrow u$ la distance bc du centre de gravité de l'arc AM à la ligne AB , l'on aura cette distance en divisant la somme $S. yds$ des momens par la somme $S.ds$ des élémens, ou par s ; donc $u = \frac{S.yds}{s}$. Si la courbe est rapportée à un foyer C , en faisant $CM = y$, l'angle $MCA = x$, le triangle rectangle MCP donne $r : \sin. x :: y : MP = \frac{y \sin. x}{r}$. Multipliant cette quantité par ds , l'on aura le moment de $ds = \frac{y \sin. x . ds}{r}$;

donc $u = \frac{S.y \sin. x . ds}{r . s}$. En déterminant la distance du centre de gravité du même arc par rapport à une autre ligne TT perpendiculaire à la ligne AB , & menant les lignes Tb, bc , parallèles aux lignes AB & AT , & à la distance trouvée, de manière que Tb soit menée à la distance $bc = u$ & bc à la distance $V = bT$ qui appartient à la ligne AT , le point b sera déterminé par le concours de ces deux lignes.

S'il s'agit de la surface AMP (Fig. 33), en appelant s cette surface, ds sera son élément. Multipliant l'élément $PpMm$ par la distance $Lr = \frac{Ln}{2} = \frac{y}{2}$, l'on aura le moment de l'aire $= \frac{1}{2} S. yds$;

donc l'on aura $u = \frac{\frac{1}{2} S. yds}{s}$. Si l'on suppose que les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses, l'élément de l'aire sera $\Rightarrow ydx$; donc dans ce cas u est $= \frac{\frac{1}{2} S. y^2 dx}{S. ydx}$.

Si la courbe AD est rapportée à un foyer F (Fig. 34), on fera $FM = y$, l'arc Mn décrit du foyer $F = dx$, l'angle $AFM = V$ & le centre de gravité du triangle $MnF = \left(\frac{ydx}{2} \right)$ sera situé en i à la distance $\frac{2}{3} . y$ de F (comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus 69); donc en faisant $r : \sin. V :: \frac{2}{3} . y : \frac{2}{3} . y \sin. V$, l'on aura la

distance Pi du centre de gravité de l'élément de l'aire par rapport à la ligne AF . Si l'on multiplie cette quantité par $\frac{y dx}{2}$, l'on aura le moment du triangle $F M m =$

$\frac{1}{3r} \cdot y^2 \cdot \sin. V \cdot dx$; donc en divisant la somme des moments par celle des éléments, l'on aura la distance bc du centre de gravité de l'aire entière $= u = \frac{\frac{1}{3} S. y^2 \sin. V dx}{\frac{1}{2} S. y dx}$.

Si l'on fait $r : dV :: y : dx$, l'on aura $\frac{y dV}{r} = dx$. Ainsi

l'on pourra chasser dx de la formule précédente. Si l'on veut avoir la distance gb du centre de gravité par rapport à une ligne fg parallèle à FA & distante de FA de la quantité p , on cherchera la distance $u = bc$, & l'on aura $u + p$ pour la distance cherchée, ce qui est évident.

S'il s'agit d'un solide $m A M$ (Fig. 29), appellant s l'élément de ce solide, t la distance de cet élément à un plan donné de position; la distance du centre de gravité du solide par rapport à ce plan, sera $= \frac{S. t ds}{s}$. S'il s'agit

d'un solide de révolution, l'on aura $ds = \frac{c}{2r} y^2 dx$ & $u =$

$$\frac{\frac{c}{2r} \cdot S. y^2 t dx}{\frac{c}{2r} S. y y dx} = \frac{S. y^2 t dx}{S. y^2 dx}.$$

82. Il faut maintenant donner la fameuse *Regle de Guldin*, selon laquelle, une quantité quelconque située sur le même plan que l'axe de révolution produit en tournant une quantité qui est égale au produit de la quantité qui tourne par le chemin que parcourt son centre de gravité. Ainsi une ligne engendre une surface égale au produit de cette ligne multipliée par l'arc que décrit le centre de gravité de cette ligne, & une surface produit un solide égal à cette surface multipliée par le chemin parcouru par le centre de gravité de la surface. Nous allons dé-

montrer cette règle élégante, 1°. Pour les surfaces, & en second lieu pour les solides.

Soit (Fig. 35) la ligne $AM = s$, l'élément $Mm = ds$, la distance fn du centre de gravité n de cet élément à l'axe de révolution $Lg = y$, le moment de cet élément sera $= y ds$, & la distance LC du centre de gravité de la ligne AM à l'axe Lg sera $= \frac{S. y ds}{S. ds} = \frac{S. y ds}{s} = u$.

Donc $S. y ds = us$. Si l'on multiplie les deux termes de cette équation par le rapport $\frac{c}{r}$ de la circonférence

au rayon, l'on a $\frac{c}{r} S. y ds = \frac{c}{r} us = s. \frac{c}{r} u$. Mais $\frac{c}{r} u$ est la circonférence décrite par le rayon $LC = u$, ou est la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc AM , & $\frac{c}{r} y$, la circonférence décrite par le milieu n

de l'élément ds , cette circonférence multipliée par l'élément ds , donne l'élément de la surface engendrée,

laquelle est $= S. \frac{c}{r} y ds$; donc cette surface est égale

au produit de la ligne AM multipliée par le chemin que parcourt le centre de gravité de cette ligne.

Soit la surface ADB (Fig. 36) $= s$, son élément $bNmM = ds$, en faisant $nP = CL = y$, & supposant que C est le centre de gravité de cet élément, il est visible que l'on aura $y ds$ pour le moment de cet élément par rapport à l'axe PL ; donc la distance du centre de gravité de la surface à l'axe PL , sera $= \frac{S. y ds}{s} = u$; donc $S. y ds = us$; donc $S. \frac{c}{r} y ds = \frac{c}{r} us$.

Mais $\frac{c}{r} y$ est la circonférence décrite par le point n ou

par le point C & $\frac{c}{r} y ds$ est le solide engendré par l'é-

lément $mMNb$, $S. \frac{c}{r} y ds$ est le solide engendré par la

surface s ; donc ce solide est $= \frac{c}{r} us$. Mais $\frac{c}{r} u$ est la circonférence décrite par le centre de gravité de la sur-

face s ; donc le solide engendré par la surface s est égal au produit de cette surface multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette surface.

Dans cette règle on doit remarquer que si une partie de la ligne ou de la surface qui tourne étoit située de l'autre côté de l'axe de rotation ou ne se trouve pas le centre de gravité de la ligne ou de la surface, les éléments de cette partie ayant des distances négatives par rapport à l'axe de rotation, la surface ou le solide engendrés par cette partie, doivent être pris négativement ; donc la différence des deux parties engendrées, ou des quantités engendrées sera égale à la quantité qui tourne multipliée par le chemin que parcourt son centre de gravité. Si l'axe de rotation passe par le centre de gravité les quantités engendrées par les parties situées de part & d'autre sont égales. Si l'on cherche le centre de gravité de chaque partie en particulier, on trouvera facilement la quantité engendrée par chaque partie, & la somme des quantités ainsi engendrées.

La Règle de Guldin est d'un très-grand secours pour la résolution des problèmes, comme nous l'allons faire voir.

83 PROBLÈME. Supposant que les lignes A, B, D, F, f , tournent autour de l'axe RL , trouver la somme des surfaces engendrées par ces lignes (Fig. 37). Ayant joint les lignes B & A par la ligne BA qui passe par le milieu de ces lignes, je divise la ligne BA au point P en raison réciproque des lignes A & B , le point P sera le centre de gravité de ces deux lignes ; tirant par le point P & par le milieu D de la ligne D , la ligne PD , je divise cette ligne en p en raison inverse de D & de $A + B$, le point p est le centre de gravité des trois lignes A, B, D . Par le point p & le milieu de F , je mene Fp & je divise cette ligne en g , en raison réciproque de F & de $A + B + D$, le point g est le centre de gravité des lignes A, B, D, F . Par le milieu de f je mene gf , & divisant cette ligne en M en raison réciproque de f & de $A + B + D + F$, le point M est le centre de gravité des cinq lignes données. Par le point M , je mene la ligne MN parallèle à l'axe LR & égale à $A + B + D + F + f$, la ligne NM , en tournant autour de LR , produira une surface égale à la somme des surfaces que produiroient les lignes A, B, D, F, f .

84. PROBLEME. L'on a deux figures P & $ABDfg$ qui tournent autour de l'axe RL (Fig. 38), on demande un solide égal à la somme des solides engendrés par ces figures. Je cherche (69), le centre de gravité P du triangle P ; je divise l'autre figure en triangles & je cherche le centre de gravité particulier de chacun des triangles qui composent la figure. Joignant les centres de gravité s & i des deux triangles Afg , AfD par la ligne si , je divise cette ligne en r en raison réciproque des aires de ces triangles, le point r sera le centre commun de gravité de ces triangles. Supposant que le point b est le centre de gravité du triangle ABD , je tire br & divisant cette ligne en n en raison réciproque du triangle ABD & de la somme des autres triangles, le point n est le centre de gravité des trois triangles qui composent cette figure. Menant la ligne Pn & divisant cette ligne en C en raison inverse des aires des deux figures, le point C sera le centre de gravité des deux figures. Si l'on prend un rectangle $LRMm$, égal à la somme des aires des deux figures, & tel que son centre de gravité soit situé en C , ce rectangle en tournant autour de LR engendrera un cylindre égal à la somme des solides qu'engendreraient les figures données; il est aisé de voir comment il faudroit s'y prendre si l'on avoit un plus grand nombre de figures.

85. PROBLEME. Supposant qu'un cercle $Abgf$ tourne autour de l'axe LF , trouver le rapport des surfaces engendrées par les demi-circonférences $b gf$, $b Af$ (Fig. 39). Selon ce qu'on a dit ci-dessus (77), en faisant le quart ce cercle $b g = n$, ou la demi-circonférence $b gf = 2n$, le rayon $= r$, l'on aura $2n : 2r :: r : Cm = \frac{rr}{n}$, distance du centre de gravité de la demi-circonférence $b gf$ au centre C ; de même la distance Cp du centre de gravité de la demi-circonférence $b Af$, au centre du cercle sera $= \frac{rr}{n}$. Faisant $FC = u$, l'on aura $Fm = u + \frac{rr}{n}$ & $Fp = u - \frac{rr}{n}$. Mais les deux demi-circonférences étant égales, les surfaces engendrées par ces demi-

circonférences sont entr'elles comme les circonférences décrites par les points m & p ; donc la surface engendrée par la demi-circonférence $b g f$, est à la surface engendrée par la demi-circonférence $b A f$:: $u + \frac{rr}{n} : u - \frac{rr}{n}$ (car les circonférences des cercles sont dans le rapport de leurs rayons) :: $nu + rr : nu - rr$.

REMARQUE. La règle de Guldin ne suppose pas que la révolution soit entière & il est aisé de voir qu'elle a lieu également en supposant que la lettre c dans le rapport $\frac{c}{r}$ désigne un arc quelconque de cercle.

86. La règle de Guldin peut aider le calcul intégral, comme on le va faire voir dans les courbes qu'on peut décrire à la manière de la conchoïde de Nicomède. (Voyez ce qu'on a dit sur cette courbe dans la première partie de cet ouvrage, *Courbes Algébriques*, N°. 69) Supposons que AL (Fig. 40), représente une courbe quelconque, hors de laquelle soit situé un pôle C , par lequel passe la ligne $CD B$ qui rencontre la courbe donnée en A , ayant les parties AB , AD égales ; que cette ligne se meuve de manière qu'elle passe toujours par le pôle C & que le point A se trouve toujours dans la ligne AL ; les points B & D décriront le premier la courbe BF , le second la courbe $D b$. Supposons que cette ligne est parvenue dans la situation CF^* , & qu'elle prend ensuite une situation infiniment proche Cf . Du centre C , je décris les arcs Fm , Ln , bi ; je fais $CA = b$, $DA = AB = LF = Lb = a$, $CL = y$, $Ln = dx$. L'espace $Ffbs$ est censé égal à la zone circulaire $Fmbi$, produite par le mouvement de la ligne $Fb = 2a$ autour du centre C . Mais le centre de cette ligne est le point L qui décrit l'arc Ln ; donc cette zone est $= 2adx$; donc l'espace $Ffbs$ est $= 2adx$. Qu'on divise FL en deux également en P & que du

* On peut supposer que la ligne BC s'allonge ou se raccourcit du côté du point C , quoique la partie $AB = FL$ soit toujours $= AD = Lb$.

point C on décrive l'arc Pp, qui étant à l'arc dx comme $y + \frac{a}{2} : y$, sera $= dx + \frac{a dx}{2y}$, donc la zone F m L n, & par conséquent aussi l'espace F f L l sera $= a dx + \frac{a^2 dx}{2y}$. De même ayant divisé L b en deux parties égales en g & du point C comme centre ayant décrit l'arc gr, on trouvera l'espace L l b s $= a dx - \frac{a^2 dx}{2y}$. Ainsi la dif-

férence des espaces F f L l, L l b s sera $= \frac{a^2 dx}{y}$; donc

puisque par l'équation de la courbe A L, on peut avoir dx en y & dy , on pourra trouver l'espace compris entre les courbes B F, D b & la courbe A L.

Supposons que la ligne A L est une ligne droite perpendiculaire sur C E, & que le point B décrit la conchoïde supérieure de Nicomède & le point D la conchoïde inférieure. Faisons $AL = RM = t$, l'on aura $CL = y - \sqrt{(bb + tt)}$, $Ll = dt$. Les triangles rectangles C A L, n L l ont les angles n l L, C L A qu'on peut regarder comme égaux (à cause des lignes C L, C l infiniment proches); donc ces triangles sont semblables & donnent $L n (dx) : Ll = dt :: CA = b : CL =$

$\sqrt{(bb + tt)}$; donc $dx = \frac{b dt}{\sqrt{(bb + tt)}}$. Substituant cette

valeur de dx dans $2 a dx$, l'on a l'espace F f b s

$$= \frac{2 a b dt}{\sqrt{(bb + tt)}} = \frac{4 a}{b} \cdot \frac{b l dt}{2 \sqrt{(bb + tt)}} \text{ qui dépend de la}$$

quadrature de l'hyperbole. Du point A pris pour centre, avec le demi-axe $AC = b$, décrivez l'hyperbole équilatère C R; selon ce qu'on a dit ci-dessus (21) * le

* En changeant a en b & y en z , le secteur qu'on a trouvé

$$(21) = S. \frac{a a dy}{2 \cdot \sqrt{(aa + yy)}}, \text{ sera } S. \frac{b b dz}{2 \cdot \sqrt{(bb + zz)}}, \text{ \& l'élé-}$$

$$\text{ment de ce secteur sera } = \frac{b^2 dz}{2 \cdot \sqrt{(bb + zz)}}.$$

secteur A Ç R sera $= S. \frac{b^2 dt}{2\sqrt{bb+tt}}$; donc l'espace B F D b est au secteur A Ç R :: 4 a : b. La différence entre les espaces F s L l , L l b s , ayant été trouvée $= \frac{a^2 dx}{y}$, cette différence sera $= \frac{a^2 b dt}{bb+tt} = \frac{a^2}{b} \times \frac{b^2 dt}{bb+tt}$. Mais $S. \frac{b^2 dt}{bb+tt}$ est un arc de cercle dont le rayon est $= b$ & la tangente $= t$; donc la différence des espaces ABFL, ALDb, sera au produit de cet arc circulaire multiplié par a , comme a : b. Puisque la somme des espaces dont on vient de parler , dépend de la quadrature de l'hyperbole , tandis que la différence de ces espaces dépend de la quadrature du cercle , il est visible que chacun des espaces compris entre la ligne AL & les courbes B.F & D b dépend à la fois de la quadrature de l'hyperbole & de celle du cercle , car il est visible que le plus grand de ces espaces est égal à leur demi-somme , plus leur demi-différence ; le plus petit étant égal à leur demi-somme moins leur demi-différence **.

REMARQUE. Si l'on pouvoit connoître exactement la longueur de la circonférence du cercle , en multipliant cette longueur par le demi-rayon , l'on auroit

* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (31) , l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la tangente $= x$, est $= \frac{a dx}{\sqrt{aa+xx}}$; donc si le rayon $= b$, & la tangente $= t$, l'élément de l'arc sera $= \frac{b^2 dt}{bb+tt}$.

** On a vu dans la première partie de cet ouvrage (voyez les Equations.) , que des deux quantités , la plus grande est égale à la moitié de la somme , plus la moitié de la différence , & que la plus petite est égale à la moitié de la somme , moins la moitié de la différence.

l'aire ou la quadrature du cercle ; & si l'on avoit l'aire du cercle en la divisant par le demi - rayon , l'on trouveroit la circonférence. Il est aisé de voir que la quadrature du cercle dépend de la rectification de sa circonférence. C'est dans ce sens qu'on vient de dire que les espaces dont nous venons de faire mention dépendent de la quadrature du cercle.

DE LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES.

87. J'entends par *Méthode inverse des tangentes*, l'art de trouver l'équation d'une courbe par quelqu'une de ses propriétés, comme par le moyen de sa sous-tangente, la tangente, la normale, la sous-normale, la quadrature, &c. Pour cela on égalera la propriété donnée, ou sa différentielle à l'expression générale de la même propriété exprimée par le moyen du calcul différentiel. L'on tâchera, par le moyen de l'équation qui en résultera, de trouver l'équation de la courbe. Les exemples suivans pourront faire comprendre l'artifice de cette méthode.

88. PROBLÈME. *Trouver la nature de la courbe dont la sous-tangente est $= \frac{2y^2}{a}$.* L'expression gé-

nérale de la sous-tangente étant $\frac{y dx}{dy}$, l'on aura l'é-

quation $\frac{2y^2}{a} = \frac{y dx}{dy}$, ou $2y^2 dy = ay dx$,

$2y dy = a dx$, & en intégrant $\frac{2y^2}{2} = ax$, ou

$y^2 = ax$, équation à une parabole dont le paramètre est $= a$.

89. PROBLÈME. *Quelle est la courbe dont l'ordonnée y est égale à la sous-tangente.* L'on a y

$\frac{y dx}{dy}$, $y dy = y dx$, $dy = dx$, équation à la cycloïde (Section précédente, note du N° 13). Si l'on avoit un triangle rectangle, isocèle ABD (Fig. 41), en faisant l'abscisse AP = x , l'ordonnée PM = y , l'on auroit toujours $y = x$; ainsi l'équation $dy = dx$ qui donne $y = x$, appartient aussi à un triangle rectangle isocèle.

90. PROBLÈME. Trouver la courbe dans laquelle la sous-tangente est troisième proportionnelle à $a - x$ & dy . L'on aura $a - x : y :: y : \frac{y dx}{dy}$; donc $ay dx - xy dx = y^2 dy$, $adx - x dx = y dy$. donc, en intégrant, $ax - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$, ou $2ax - xx = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre seroit $2a$; ainsi la courbe demandée est un cercle, on suppose l'angle des co-ordonnées droit.

91. PROBLÈME. Trouver la courbe dans laquelle la quantité constante a est à l'ordonnée y comme $\sqrt{aa + yy}$ est à la sous-tangente. Par la nature du Problème $a : y :: \sqrt{aa + yy} : \frac{y dx}{dy}$; donc $\frac{y dx}{dy} = \frac{y \cdot \sqrt{aa + yy}}{a}$; donc $dx = \frac{dy \sqrt{aa + yy}}{a}$, & $x = S. \frac{dy \cdot \sqrt{aa + yy}}{a}$.

Si avec un paramètre $= 2a$, l'on décrit une parabole AM (Fig. 1^{re}), dont l'abscisse, AP = u , l'ordonnée PM = y , par la nature de la parabole, l'on aura $y^2 = 2a \cdot u$, $u = \frac{y^2}{2a}$, $du = \frac{y dy}{a}$, $du^2 = \frac{y^2 dy}{aa}$. Mais lorsque l'abscisse

AP est $= x$, l'élément Mm de l'arc Am est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc lorsque cette abscisse $= u$, l'on aura $Mm = \sqrt{(du^2 + dy^2)}$, substituant dans cette expression la valeur de du^2 , l'on a $Mm = \sqrt{\left(\frac{y^2 dy^2 + a a dy^2}{a a}\right)} = \frac{dy}{a} \cdot \sqrt{(aa + yy)}$

dont l'intégrale $S. \left(\frac{dy \cdot \sqrt{(aa + yy)}}{a}\right)$ est $=$

$AM = x$. Ainsi la courbe cherchée est telle que si elle a les ordonnées PM d'une parabole, ses abscisses doivent être égales aux arcs AM correspondans à ces ordonnées; de sorte que sa description dépend de la rectification de la parabole.

92. PROBLÈME. Trouver la courbe dont la sous-normale est égale à une constante a . L'expression de la sous-normale étant $\frac{y dy}{dx}$, l'on au-

ra $\frac{y dy}{dx} = a$, $y dy = a dx$, $\frac{y^2}{2} = ax$, $y^2 = 2ax$. Ainsi la courbe cherchée est une parabole dont le paramètre est $2a$.

93. PROBLÈME. Trouver la courbe dont la sous-normale est $= a - x$. Par la nature du problème $\frac{y dy}{dx} = a - x$, $y dy = a dx - x dx$,

$\frac{y^2}{2} = ax - \frac{x^2}{2}$, $y^2 = 2ax - xx$. Donc la courbe cherchée est un cercle dont le diamètre est $2a$.

94. PROBLÈME. Trouver une courbe dont la sous-normale soit $= \frac{ap - 2px}{2a}$. L'on a $\frac{y dy}{dx}$

$$= \frac{ap - 2px}{2a}, 2ay dy = ap dx - 2px dx,$$

$ay^2 = apx - px^2$, ou $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$
équation à une ellipse dont l'axe des x est $= a$,
le paramètre de cet axe étant $= p$.

95. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la sous-*
normale $= \sqrt{ax}$. Donc $\frac{y dy}{dx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $y dy$

$$= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx, \frac{y^2}{2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} x$$

$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, $y^2 = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{ax} =$
 $\frac{2}{3} x \sqrt{4ax}$. Sur l'axe AP (Fig. 42), je décris
une parabole AM avec un paramètre $= 4a$, &
& supposant l'ordonnée $PM = u$, l'abscisse AP
 $= x$, par la nature de la parabole, l'on a $u^2 =$
 $4a \cdot x$, $u = \sqrt{4ax}$. Si donc on cherche une
moyenne proportionnelle Pm entre l'ordonnée u
de la parabole, & $\frac{2}{3}x$, en faisant $Pm = y$, l'on
aura $y^2 = \frac{2}{3} x \sqrt{4ax}$. Si l'on fait la même
chose pour chacune des ordonnées de la para-
bole, l'on aura la courbe Am , qu'on peut ap-
peller quadratrice de la parabole. Car, selon ce
qu'on a dit ci-dessus (4), l'aire parabolique APM
est $\frac{2}{3} yx$, en faisant $PM = y$. Donc lorsqu'on
fait $PM = u$, cette aire sera $= \frac{2}{3} xu = \frac{2}{3} x \times$
 $\sqrt{4ax}$; donc la courbe Am est telle que les
quarrés de ses ordonnées sont égaux aux aires pa-
raboliques correspondantes.

96. PROBLÈME. Trouver la courbe dont la normale est constante $\& \equiv a$. L'expression générale de la normale étant $\frac{y}{dx} \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura $a \equiv \frac{y}{dx} \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $a dx \equiv y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $a^2 dx^2 \equiv y^2 dx^2 + yy dy^2$, $a^2 dx^2 - y^2 dx^2 \equiv yy dy^2$, $dx^2 \equiv \frac{y^2 dy^2}{aa - yy}$, $dx \equiv \frac{y dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, $-dx \equiv -\frac{y dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, $\equiv -y dy \cdot (aa - yy)^{-\frac{1}{2}}$; donc en intégrant, $-x \equiv (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, $x^2 \equiv aa - yy$, $y^2 \equiv aa - xx$, équation à un cercle dont le rayon $\equiv a$.

97. PROBLÈME. Trouver une courbe dont l'aire soit $\equiv ay$. L'élément des aires est, selon ce qu'on a dit ci-dessus (2), $\equiv y dx$; donc si l'on différencie l'aire donnée l'on aura $ady \equiv y dx$, $\frac{y dx}{dy} \equiv a$, équation différentielle d'une logarithmique dont la sous-tangente $\equiv a$, section précédente (21); ainsi la courbe cherchée est une logarithmique.

98. PROBLÈME. Trouver la courbe dont l'aire $\equiv a \sqrt{(aa + xx)}$. Donc $y dx \equiv a x dx \times (aa + xx)^{-\frac{1}{2}}$, $y \equiv \frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}}$. Pour tracer cette courbe je décris une hyperbole équilaterale (Fig. 43), dont le demi-axe CA soit $\equiv a$.

en faisant $CP = DM = x$, $CD = PM = y$, par la nature de l'hyperbole équilatère, l'on aura $y^2 = x^2 - aa$, ou $x^2 = y^2 + aa$. Si au lieu de faire $CP = x$, l'on faisoit $CP = u$, l'on auroit $u^2 = y^2 + a^2$, $u = \sqrt{aa + yy} = \sqrt{aa + xx}$, en faisant $PM = x$. Si donc on cherche une quatrième proportionnelle aux lignes $CP = DM$, CA , PM ; ou si l'on fait $\sqrt{aa + x^2} : a :: x : Pm = \frac{ax}{\sqrt{aa + xx}}$, le point m ainsi trouvé appartiendra à la courbe Am cherchée.

99. PROBLÈME. Trouver la courbe dont l'aire est $= \frac{x^3}{3a}$. Comparant l'élément de cette aire avec

ydx , on trouvera $\frac{x^2}{a} dx = ydx$, $x^2 = ay$; donc si l'on prend sur la tangente AF (Fig. 1^{re}), les abscisses $AB = x$, & qu'on fasse $BM = AP = y$, l'on aura $(PM)^2 = x^2 = ay$. Ainsi l'équation trouvée appartient à une parabole en prenant les abscisses sur la tangente & les ordonnées parallèlement à l'axe.

100. PROBLÈME. Trouver la courbe qui, par sa révolution autour de son axe, a produit le solide

$\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r}$. Si l'on prend la différentielle de ce solide & qu'on le compare avec l'élément $\frac{cy^2 dx}{2r}$ (43), l'on aura $cx dx - \frac{cx^2 dx}{2r} =$

$\frac{c y^2 dx}{2r}, x - \frac{x^2}{2r} = \frac{y^2}{2r}, 2rx - x^2 = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre $= 2r$. •

101. PROBLÈME. *Trouver la courbe génératrice du solide $= \frac{c a x^2}{4r}$. Par la nature du problème, l'on a $\frac{c a x dx}{2r} = \frac{c y^2 dx}{2r}, a x = y^2$. Donc la courbe cherchée est une parabole dont le paramètre $= a$.*

102. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont l'aire est $= 4a\sqrt{x}$. L'on aura $y dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a x^{-\frac{1}{2}} dx, y = 2a x^{-\frac{1}{2}}, y^2 = 4a^2 x^{-1}, 4a^2 = y^2 x$, ou en faisant $4a^2 = 1 \cdot 4a \cdot a = p^3, p^3 = y^2 x$, équation qui appartient à une courbe hyperbolique.*

103. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la sous-tangente est $= \frac{1}{1 + L.x}$, L désigne la logarithmique hyperbolique. L'on aura $\frac{y dx}{dy} = \frac{1}{1 + L.x}, y dx = \frac{dy}{1 + L.x}, dy = (1 + L.x) \cdot y dx, \frac{dy}{y} = dx + L.x \cdot dx$, S. $\frac{dy}{y} = L.y = x L.x$ (car la différentielle de $x L.x$ est $= dx + L.x \times dx$), $y = x^x$, équation à une courbe exponentielle.*

104. PROBLÈME. *Trouver l'équation de la courbe dont la sous-normale est $= y^2 \cdot (1 + L.x)$. Par la nature du problème, $\frac{y dy}{dx} = y^2 (1 + L.x), \frac{dy}{y} = dx + L.x dx, L.y = x L.x = L.x^x, y = x^x$.*

105. PROBLÈME. *Trouver l'équation de la courbe dont la sous-tangente est constante & $= \frac{1}{L.a}$. Donc $\frac{y dx}{dy} =$*

$\frac{1}{L.a}, y dx = \frac{dy}{L.a}, dx. L.a = \frac{dy}{y}, x L.a = L.y$, ou $a^x = y$, équation d'une logarithmique dont la sous-tangente $= \frac{1}{L.a}$.

106. PROBLÈME. Trouver l'équation de la courbe dont la somme de la sous-normale \mathcal{E} de l'abscisse est constante $\mathcal{E} = a$.

L'on aura $\frac{y dy}{dx} + x = a, y dy + x dx = a dx, \frac{yy}{2} +$

$\frac{x^2}{2} = ax, y^2 + x^2 = 2ax, y^2 = 2ax - x^2$, équation au cercle.

107. PROBLÈME. Trouver la courbe dans laquelle la différence de la sous-normale \mathcal{E} de l'abscisse est constante $\mathcal{E} = a$.

Donc $\frac{y dy}{dx} - x = a, \frac{y dy}{dx} = a + x, y dy = a dx +$

$x dx, \frac{y^2}{2} = ax + \frac{x^2}{2}, y^2 = 2ax + x^2$, équation à une hyperbole équilatère dont l'axe $= 2a$.

108. PROBLÈME. Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-normale est à la sous-tangente, comme l'abscisse est à une ligne constante $= a$. Donc $\frac{y dy}{dx} : \frac{y dx}{dy} :: x : a$, ou $dy^2 :$

$dx^2 :: x : a$; donc $ady^2 = x dx^2, a^{\frac{1}{2}} dy =$

$x^{\frac{1}{2}} dx, a^{\frac{1}{2}} y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, ay^2 = \frac{2}{3} x^3$, équation à la seconde parabole cubique.

109. PROBLÈME. Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-tangente est à l'abscisse en raison donnée de $m : 1$. Donc $\frac{y dx}{dy} : x :: m : 1$.

$\frac{y dx}{dy} = mx$, $y dx = mx dy$, $y dx - mx dy = 0$. Divisant cette équation par y^{m+1} , il vient $\frac{y dx - mx dy}{y^{m+1}} = 0$, dont l'intégrale est $\frac{x}{y^m} + C = 0$, ou $\frac{x}{y^m} = -C$. La constante C étant ici arbitraire, je puis la déterminer comme je veux, pourvu qu'il en résulte l'équation d'une courbe; ainsi je fais $-C = \frac{1}{a^{m-1}}$, & l'équation de la courbe est $\frac{x}{y^m} = \frac{1}{a^{m-1}}$, ou $a^{m-1} x = y^m$, équation aux paraboles de tous les genres, si m est un nombre positif, & aux hyperboles de tous les genres si m est un exposant négatif.

110. PROBLÈME. Trouver la nature de la courbe dont la tangente est constante $\& = a$. La formule générale de la tangente (voyez la section première), est $\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$; donc $a = \frac{y}{dy} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou $aa dy^2 = y^2 (dx^2 + dy^2)$; donc $dx^2 \cdot y^2 = (aa - yy) dy^2$, $dx^2 = \frac{dy^2 (aa - yy)}{y^2}$, $dx = \pm dy \cdot \frac{\sqrt{aa - yy}}{y}$, équation de la tractrice.

REMARQUE. Cette courbe est transcendante, car on ne peut exprimer par les méthodes de l'algèbre finie, le rapport qu'il y a entre ses co-ordonnées. Cependant on peut exprimer ce rapport par l'équation $x = S \pm dy \cdot \frac{\sqrt{aa - yy}}{y}$. Les courbes transcendantes, dont on a parlé dans la pre-

mière partie de cet ouvrage , peuvent être appelées *courbes transcendantes de la première espèce* ; & nous appellerons *transcendantes de la seconde espèce* les courbes dont on ne peut indiquer la nature que par une équation qui renferme quelque signe S d'intégration, la quantité qui est sous ce signe ne pouvant être intégrée algébriquement , ni par les logarithmes.

111. PROBLÈME. Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point, & dont la sous-tangente soit constante $\mathcal{E} = -c$. La formule des sous-tangentes de ces sortes de courbes est

(voyez la Section précédente) $\frac{y dx}{dy}$; donc $\frac{y dx}{dy} = -c$.

Mais si l'on suppose que l'on fasse $a : dz :: y : dx$, l'on a $dx = \frac{y dz}{a}$ (z étant un arc de cercle décrit d'un rayon

constant $= a$) ; donc en substituant, $\frac{y^2 dz}{a dy} = -c$, $dz = -ac y^{-2} dy$, $z = +ac y^{-1}$, $zy = ac$, équation

à la spirale hyperbolique. Dans la section première (30), on a eu pour cette spirale $yx = cr$, en supposant x un arc de cercle décrit d'un rayon constant $= r$; donc si on change x en z & r en a , l'on aura $zy = ac$.

112. PROBLÈME. Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point , & dans laquelle la sous-normale $\frac{y dy}{dx}$ (voyez la Section précédente), soit constante $\mathcal{E} = b$. L'on

aura $\frac{y dy}{dx} = b$, $y dy = b dx$. Substituant la valeur $\frac{y dz}{a}$

de dx , l'on a $y dy = \frac{b}{a} y dz$, $a dy = b dz$, $ay = bz$.

Si l'on suppose que a est égal à une circonférence c de cercle , que b est égal au rayon r de cette circonférence , & z un arc de cette même circonférence , en changeant a en c & b en r , l'on aura $cy = rz$ équation à la spirale d'Archimède.

113. PROBLÈME. Supposant une infinité de paraboles AM , Am du même ordre, mais dont les paramètres soient différents, trouver une courbe BiM , qui les coupe toutes perpendieu-

lairement (Fig. 44). Supposant la chose faite, je mène les lignes Mt , in tangentes de la courbe BM & par conséquent perpendiculaires aux courbes AM , Am . La sous-tangente des paraboles représentées généralement par $a^m x^n = y^{m+n}$ est (section précédente 10) $= \frac{(m+n)}{n} x$, en faisant $AP = x$; mais la sous-tangente PT est la sous-normale de la courbe BM au point correspondant à l'abscisse x ; & cela a lieu également pour toutes les paraboles AM , Am , &c. qu'on pourroit tracer. Il ne s'agit donc plus que de trouver la courbe BM dont la sous-normale soit $= \frac{m+n}{n} x = \frac{P}{n} x$, en supposant $m+n = p$. Mais cette sous-normale étant prise dans un sens opposé à la sous-normale Pt de la parabole AM , nous la ferons négative; Ainsi il faudra chercher la courbe dans laquelle la sous-normale soit $= -\frac{P}{n} x$. L'on aura donc $\frac{y dy}{dx} = -\frac{P}{n} x$, $y dy = -\frac{P}{n} x dx$, $y dy + \frac{P}{n} x dx = 0$. En intégrant & faisant attention que la différentielle d'une constante C est $= 0$, nous pourrons faire $\frac{y^2}{2} + \frac{P}{2n} x^2 = C$. Supposant $C = aa$, l'on aura $\frac{y^2}{2} = aa - \frac{P}{2n} xx$, ou $(PM)^2 = y^2 = 2 \cdot aa - \frac{P}{n} xx$, ou $\frac{n}{P} y^2 = \frac{2n \cdot aa}{P} - xx$, équation à une ellipse dans laquelle le carré du demi-axe sur lequel on prend l'abscisse x est $= \frac{2n}{P} \cdot aa$. Si l'on fait $p : 2n :: a : g$, l'on aura $\frac{2na}{P} = g$, & faisant $g \cdot a = bb$, l'on aura $\frac{2n \cdot aa}{P} = b^2$; & l'équation de la courbe sera $\frac{n}{P} y^2 = bb - xx$, ou $y^2 = \frac{P}{n} \cdot (bb - xx)$, dans laquelle le rapport de $p : n$ est le même que celui du carré de l'autre demi-axe de l'el.

lipse au carré bb ; ainsi la courbe cherchée est une ellipse.

Si $m = n = 1$, l'on aura $p = 2$, l'équation des paraboles sera $ax = y^2$, & l'équation $y^2 = \frac{p}{n} (bb - xx)$

deviendra $y^2 = \frac{2}{1} . (bb - xx)$. Ainsi une ellipse BM qui aura son axe sur la même ligne qu'une infinité de paraboles du premier genre qui ont le même sommet A (qui est le centre de l'ellipse) , dans laquelle bb est le carré de la moitié de l'axe des x , le carré de l'autre demi-axe étant à bb comme $2 : 1$, ou dans laquelle le paramètre de l'axe $2b$ est à cet axe , comme $2 : 1$, coupera toutes ces paraboles à angles droits.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle est égale à 0 , & qu'on peut l'intégrer , on doit ajouter une constante ; cette constante , si elle existoit , a nécessairement disparu dans la différenciation. Lorsque cette constante est arbitraire , il est de l'industrie du Géomètre de l'exprimer , de manière qu'il en résulte la solution la plus simple du problème proposé ; & s'il s'agit d'une courbure , il faut faire en sorte que la constante soit homogène aux termes de l'intégrale.

§14. PROBLÈME. Supposant une infinité d'hyperboles dont l'une soit aM (Fig. 45) , qui ayent les mêmes asymptotes perpendiculaires l'une à l'autre , & dont les abscisses soient AP (on suppose l'angle MPA des co-ordonnées droit) , trouver une courbe BM , qui les coupe toutes à angles droits. La courbe BM sera donc perpendiculaire à la tangente MT , & PT sera la sous-tangente de la courbe aM . Or la sous-tangente d'une hyperbole quelconque , est (comme on l'a dit section précédente 10) , égale au quotient de l'exposant de l'ordonnée divisé par celui de l'abscisse , en prenant l'exposant de l'abscisse avec le signe — ; donc en prenant l'équation générale des hyperboles $a^m + b^m = y^m x^n$, la sous-tangente PT sera $= -\frac{m}{n} x$. Mais PT est la sous-normale de la courbe BM respectivement à laquelle elle est positive , parce qu'elle va du côté où doivent aller les sous-perpendiculaires de BM par

rapport à l'origine B de la courbe. Le problème consiste donc à trouver une courbe B M, dont la sous-normale soit $= \frac{m}{n} x$; l'on aura donc $\frac{y dy}{dx} = \frac{m}{n} x$, ou $y dy = \frac{m}{n} x dx$, $\frac{m}{n} x dx - y dy = 0$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{yy}{2} = C = aa$, ou $\frac{n}{m} y^2 = x^2 - \frac{2n}{m} aa$. Donc la courbe cherchée est une hyperbole rapportée au premier axe, & le terme $\frac{n}{m} y^2$ fait connoître que le premier axe doit être à son paramètre, comme $n : m$. Si l'on fait $m = n = 1$, l'équation $a^2 = y^2 = x^2$ deviendra $a^2 = yx$, & l'équation ci-dessus sera $y^2 = x^2 - 2aa = xx - b^2$, en prenant b moyenne proportionnelle entre a & $2a$. Cette équation appartient à une hyperbole équilatère dont l'axe est $= 2b$. Donc si BMm est cette hyperbole, que A soit son centre, AB $= b$, la moitié de son axe, Bm, coupera à angles droits toutes les hyperboles du premier genre dont les équations $xy = a^2$, $xy = (a')^2$, $xy = (a'')^2$, &c. ne diffèrent entr'elles que par rapport à la puissance, & qui sont rapportées aux mêmes asymptotes perpendiculaires l'une à l'autre.

115. PROBLÈME. Trouver une courbe B M (Fig. 13), rapportée à des co-ordonnées perpendiculaires, dans laquelle en faisant BA $= a$, l'aire A P m B soit égale au produit de l'arc B m multiplié par a . L'élément de l'arc B m est $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & l'élément de l'aire A P m B est $y dx$; donc S. $y dx = a$ S. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou $y dx = a \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $y^2 dx^2 = aa dx^2 + aa dy^2$, $dx^2 (y^2 - aa) = aady^2$, $dx = \frac{a dy}{\sqrt{yy - aa}}$, équation de la courbe des co-sinus hyperboliques (21).

116. PROBLÈME. Trouver la courbe dont l'aire en tournant autour de l'axe des abscisses, produit le solide $\frac{c}{2r}$ S. $\frac{a^3 dx}{x}$.

Comparant l'élément des solides de révolution $\frac{c}{2r} y^2 dx$ avec la différentielle $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x}$ du solide proposé, l'on a

$\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x} = \frac{c}{2r} y^2 dx$, $\frac{a^3}{x} = y^2$, $a^3 = x y^2$, équation à une courbe hyperbolique.

117. PROBLEME. Trouver une courbe AM (Fig. 46), rapportée aux co-ordonnées $AP = x$, $Pm = y$ perpendiculaires l'une à l'autre telle que l'aire AmP soit égale au segment AEF , compris entre la corde AE & l'arc correspondant d'un demi-cercle dont le diamètre $AB = 2a$. L'espace $AFEP$, selon ce qu'on a dit ci-dessus (14), est $= S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Le triangle $AP E$ est $= \frac{AP \cdot EP}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{(2ax - xx)}}{2}$; donc le segment

$$AEF = S. dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{x \sqrt{(2ax - xx)}}{2}.$$

en différentiant, l'on aura $dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} \cdot dx \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{a dx - x dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} =$

$\frac{a dx \cdot \sqrt{x}}{2 \sqrt{(2a - x)}}$, élément du segment AEF ; donc $y dx$

$$= \frac{a dx \cdot \sqrt{x}}{2 \sqrt{(2a - x)}}, \text{ ou } y = \frac{a \sqrt{x}}{2 \sqrt{(2a - x)}}, \text{ équation d'une}$$

courbe du troisieme ordre. Cette courbe commence en A , coupe le demi-cercle au point D correspondant à une abscisse $= \frac{3}{2} a$ & s'approche continuellement de son asymptote

BN . L'aire AmP de cette courbe est égale au segment circulaire AEF . Ajoutant de part & d'autre l'espace AmE , l'on aura l'espace $AmEF$ compris entre la courbe, le cercle & la ligne droite mE , égal au triangle $AE P$. L'espace infiniment long $ADMNB$ renfermé entre la courbe, le diamètre AB & l'asymptote sera égal au demi-cercle ADB ; donc si du demi-cercle & de cet espace l'on retranche l'espace commun ADB , l'on aura l'espace infiniment long $BNMD = AFEDm A$. Or cet espace est égal au triangle rectiligne ADG ; donc $BNMD$ est $= ADG$.

118. PROBLÈME. Sur la surface du quart d'un hémisphère $ABDC$ (Fig. 47), mener une ligne AQD , de manière que la lunule $AQDA$ soit quarrable algébriquement. Je mène les grands cercles AQM , Aqm^* , qui coupent la courbe en Q & q ; je tire les perpendiculaires QP , qp sur le demi-axe AC , & des points M & m les perpendiculaires MN , mn à la ligne BC ; enfin je mène OQ , parallèle à la ligne Mm . Je fais l'arc $BM = s$, $Mm = ds$, $BN = x$, $Nn = dx$, $AP = z$, $Pp = dz$, $PQ = y$, le rayon de la sphere $= a$. Il est visible que le triligne AQq est l'élément de la lunule; mais AOQ étant un infiniment petit du premier ordre, OQq sera un infiniment petit du second ordre; donc en négligeant cet infiniment petit, l'élément de la lunule sera AOQ . Je mène les arcs infiniment proches Vu , Zz parallèles **, du point V j'abaisse sur AC la perpendiculaire VT & je fais $AT = t$, $VT = u$. Mais VT étant le rayon de l'arc Vu , l'on a la proportion $a : VT = u ::$

$Mm = ds : Vu = \frac{uds}{a}$; & parce que VZ est l'élément

de l'arc AV dont le sinus verse est $AT = t$, le sinus droit étant $VT = u$, l'on a $VZ : a :: dt : u$ ***, ou $VZ =$

$\frac{adt}{u}$; donc le rectangle $VuZz = \frac{uds}{a} \cdot \frac{adt}{u} = ds dt$. Donc

intégrant, en regardant ds comme constante (ce qui est très-permis), l'on aura le triligne $AVu = t ds$, & supposant $AT = AP$, ou supposant $t = z$, l'on aura le triligne $AOQ = z ds$. Tel est l'élément de la lunule.

L'élément ds d'un arc de cercle dont le rayon est $= a$ & l'abscisse comptée du sommet $= x$, est, selon

* Les cercles dont les plans passent par le centre de la sphere sont appelés *grands cercles de la sphere*. Les *petits cercles* sont ceux dont les plans ne passent pas par le centre de la sphere.

** Les centres de ces arcs sont dans la ligne AC , & les cercles auxquels ils appartiennent sont des cercles parallèles.

*** Dans la figure 3, l'élément ir est à il , différentielle du sinus verse AH , comme le rayon Ci est au sinus droit iH .

ce qu'on a dit ci-dessus (31) $= \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$;

donc l'élément $A O Q = \frac{az dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; donc la portion de la lunule comprise entre l'arc circulaire AQ & l'arc AbQ de la courbe $AbQD$, sera $= S. \frac{az dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$,

& en supposant $z = a$, & $x = a$, l'on aura la lunule entière. Ayant décrit un grand cercle quelconque AQM & mené MN perpendiculairement à BC , supposons $z = \sqrt{(2ax - xx)}$; c'est-à-dire, supposons $MN = AP$, la lunule sera $= S. a dx = ax$, & faisant $x = a$, la lunule entière sera $= aa$. C'est pourquoi, si ayant décrit un grand cercle quelconque AQM , l'on mène MN perpendiculaire à BC , & qu'on prenne $AP = MN$, & que dans le plan de ce cercle l'on mène PQ perpendiculaire sur AC , le point Q & tous ceux qui seront semblablement déterminés, appartiendront à la courbe cherchée, & la lunule $AQDA$ fera égale au carré du rayon.

119. PROBLÈME. On demande maintenant de trouver un onglet $AHBDQA$ qui soit quarrable algébriquement. Je remarque que le triligne $A O Q$ vient d'être trouvé $= z ds$; donc en supposant $z = AC = a$, l'on aura le triligne $AMm = a ds$; donc $MOQm$ qui est l'élément

de l'onglet sera $= (a - z) . ds = \frac{(a - z) . a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$;

donc en intégrant, la partie de l'onglet comprise entre le quart de cercle AHB , les arcs de cercle BM , QM &

l'arc QbA sera $= S. \frac{(a - z) . a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Soit $z = x$, ou

$AP = BN$; l'onglet deviendra $= S. \frac{(a - x) . a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$

$= a \sqrt{(2ax - xx)}$, & en faisant $x = a$, l'onglet entier sera $= aa$.

La courbe AQD se construit de même que dans le problème précédent ; car ayant pris un grand cercle quelconque, AQM , & mené le sinus MN de l'arc BM , prenez $AP = BN$, & dans le plan $AQMC$ du grand cercle AM menez PQ perpendiculaire à AC ; le point Q

& tous les autres ainsi déterminés seront dans la courbe cherchée; & parce que les sinus versés BN , AP des arcs BM , AQ sont égaux, les arcs le seront aussi. C'est pour-
quoi prenant toujours $AQ = BM$, tous les points Q seront à la courbe.

REMARQUE. L'on peut souvent trouver la courbe qui résout un problème qui peut paroître d'abord assez difficile sans employer, ni le calcul différentiel, ni le calcul intégral, ainsi qu'on peut le voir en lisant la première partie de cet ouvrage, la section précédente, & par la solution du problème suivant.

120. PROBLÈME. Supposant un cercle $ambn$ (Fig. 48), dont la demi-circonférence soit $= AS = C$, l'on demande de trouver des arcs qui soient entre eux comme les carrés de leurs sinus. Si l'on tire une ligne indéfinie Az , sur laquelle en faisant $AS = C$, $Sz = C$, $z1 = C$, & ainsi de suite, l'on prenne une infinité de parties dont chacune soit $= C$, qu'on fasse l'abscisse AP égale à l'arc am correspondant, que par le point P on mène PM perpendiculaire à AP & égale au sinus pm de l'arc am & qu'on fasse la même chose pour chaque arc de la demi-circonférence amb , la ligne AMS sera appelée la ligne des sinus. Si l'on fait Sg égale à l'arc bn , & qu'on mène de même $gN = Dn$, sinus de l'arc $ambn$, la partie SNz appartiendra aussi à la ligne des sinus. Mais le sinus gN sera négatif à cause de l'arc $ambn > C$ & $< 2C$. Si sur $z1 = C$, l'on prend zq égale à l'arc $am = u$, & qu'on mène $Rq = \sin. u$, le point R appartiendra aussi à la ligne des sinus. On voit aisément que les arcs u , $C - u$, $2C + u$, $3C - u$, $4C + u$, $5C - u$, &c. ont le même sinus.

Cela posé, la question est donc réduite à trouver une courbe $AMBRV$ qui coupe la ligne des sinus en différens points M , r , R , V , &c. & qui soit telle que ses abscisses AP , AF , &c. soient entre elles comme les carrés des ordonnées PM , rF , &c. communes à cette courbe & à la ligne des sinus. Si l'on fait les abscisses $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, la question sera réduite à trouver une courbe dans laquelle les x soient entre eux comme les carrés y^2 des ordonnées; or nous savons que c'est-là une propriété de la parabole; ainsi la courbe $AMrBR$ doit être une parabole.

Si l'on suppose que AP est l'axe de la parabole, l'angle que fait la courbe, ou la tangente de la coube avec l'axe AP au point A , sera droit dans la parabole; mais cet angle est de 45° dans la ligne des sinus comme nous le ferons voir dans un moment. Donc au commencement la parabole tombe hors de la ligne des sinus. Si l'on suppose que l'équation de la parabole est $ax = y^2$, & qu'on fasse le paramètre fort petit, la parabole coupera la ligne des sinus dans plusieurs points. Si l'on fait le rayon du cercle $ambn = p$, lorsqu'on aura $y = p$, l'on aura $ax = p^2$, $x = \frac{p^2}{a}$. Si l'on prend donc $x = \frac{p^2}{a}$ & $= \frac{5}{2}C$, une des branches de la parabole recontera la ligne des sinus au point correspondant à cette abscisse. Si l'abscisse $x = \frac{pp}{a}$ répond à $\frac{C}{2}$, ou à $\frac{3}{2}C$, ou à $\frac{5}{2}C$, &c., comme les ordonnées paraboliques vont toujours en augmentant, la parabole ne rencontrera plus au-delà la ligne des sinus. Si $\frac{p^2}{a} = x$ est $> C$, la ligne des sinus sera coupée en plusieurs points. Si l'abscisse $x = \frac{p^2}{a}$ est $= \frac{1}{2}C$, la parabole touchera la ligne des sinus sans la couper. Si $\frac{p^2}{a}$ est $> 201.C$, la demi-parabole AR coupera la ligne des sinus au moins en 200 points*, & alors a sera $< \frac{pp}{201.C}$. Donc si on décrit une parabole AMR avec le paramètre $a < \frac{p^2}{201.C}$, l'on aura au moins 200 arcs qui seront entreux comme les quarrés de leurs sinus. Il est facile de voir comment on doit déterminer a pour avoir tel nombre d'arcs que l'on voudra qui soient dans le rapport des quarrés de leurs sinus.

* Si on suppose que les deux branches de la parabole soient décrites, il est facile de voir en combien de points la branche AN doit couper la ligne des sinus.

Nous avons dit que l'angle PAM que fait la ligne des sinus avec la ligne AP étoit de 45° . Or c'est ce qui est évident; car si dans le cercle $ambn$ on prend l'arc am infiniment petit, son sinus mp sera censé égal à cet arc; donc si AP est un arc infiniment petit, l'on aura $AP = PM$ & le triangle rectangle AMP , dont l'hypoténuse est l'arc AM de la courbe des sinus sera isocelle, & l'angle MAP sera de 45° , aussi bien que l'angle PMA ; donc, &c.

APPLICATION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DU CALCUL INTÉGRAL AUX COURBES
A DOUBLE COURBURE.

121. Afin de mieux comprendre cette matière, les commençans feront bien de relire ce que nous avons enseigné dans la première partie de cet ouvrage, sur les surfaces courbes & les courbes à double courbure.

122. PROBLÈME. Étant donnée la courbe à double courbure AN (Fig. 49), son axe AP des x , dont l'origine est A , l'équation de la courbe de projection sur le plan APM de la base, & celle d'une des deux autres courbes de projection, on demande de mener à un point N de la courbe à double courbure la tangente Nt , ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur de la sous-tangente Mt aussi bien que sa position. Du point N , je mène l'ordonnée NM , & du point M où elle rencontre le plan de la base, la co-ordonnée MP , je prends le point n infiniment proche de N , je mène les co-ordonnées correspondantes nm , pm , & Nh parallèle à Mm , aussi bien que Mh parallèle à l'axe AP . Faisant ensuite $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$, l'on aura $Pp = dx$, $mH = dy$, $nh = dz$ & $Mm = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Mais les triangles semblables nNh , NMt , donnent $nh : Nh = Mm : MN$.

$$Mt, \text{ ou } dz : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: z : Mt = \frac{z \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}.$$

Il est aisé de voir que cette sous-tangente doit être située sur Mt , tangente de la courbe de projection AM , puisque les lignes Nn , Mm étant dans le même plan, leurs prolongemens doivent aussi être dans le même plan. Pour faire usage de cette formule il faudra, par le moyen des courbes de projection, éliminer deux des

trois variables qu'elle contient, la différentielle de la variable qui restera se trouvant au numérateur & au dénominateur, la formule sera délivrée de différentielles.

123. COROLLAIRE I. La tangente Nt est égale à

$$\sqrt{(MN)^2 + (Mt)^2} = \sqrt{\left(\frac{(xz \cdot dx^2 + zy \cdot dy^2)}{dz^2} + z^2\right)} = \frac{z}{dz} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

124. COROLLAIRE II. Si dans le plan du triangle tMN on mène la perpendiculaire NO à la courbe à double courbure, les triangles semblables Nnh , NMO , donneront $Nh = \sqrt{dx^2 + dy^2} : nh = dz :: MN = z : MO = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, expression de la sous-normale MO ; donc la normale $NO = \sqrt{MO^2 + MN^2} = \sqrt{MO^2 + z^2} = \frac{z \sqrt{dz^2 + dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$

REMARQUE. Si l'on trouvoit la sous-tangente négative, on la prendroit du côté opposé; c'est-à-dire, qu'on la prendroit sur la tangente tM du côté de O , &c. Si la sous-normale étoit négative, on la prendroit du côté de A .

125. PROBLÈME. Supposant que les équations des courbes de projection AM , AV , sur les plans APM , RAQ , sont $ax = y^2$ & $by = zz$, on demande la sous-tangente Mt de la courbe à double courbure AN . La première équation donne $a dx = 2y dy$, la seconde donne $b dy = z dz$; donc

$$dy = \frac{a dx}{2y} = \frac{a dx}{2\sqrt{ax}}, dz = \frac{b dy}{2z} = \frac{b dy}{2\sqrt{by}} = \frac{ab dx}{4\sqrt{a^3 b^2 x^3}} \quad (\text{en substituant la valeur de } dy \text{ \& celle de } y = \sqrt{ax});$$

donc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \cdot \sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$. Mais de plus $zz = by = b\sqrt{ax} = \sqrt{bbax}$; donc $z = \sqrt{bbax}$. Substituant les va-

leurs de z , de dz , de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ dans la formule de la sous-tangente, l'on a $\frac{z}{dz} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$4x \cdot \sqrt{\frac{(4x+a)}{4x}} = 2\sqrt{(4xx + ax)}$; mais la sous-tangente de la parabole AM est $= 2x$ & la tangente $MT = \sqrt{(4xx + y^2)} = \sqrt{(4xx + ax)}$; donc la sous-tangente Mt de la courbe à double courbure AN est double de la tangente MT .

126. PROBLÈME. Trouver la sous-normale de la même courbe à double courbure. NM étant une perpendiculaire abaissée du sommet N de l'angle droit du triangle rectangle NO sur l'hypothénuse, l'on a $Mt : MN :: MN : z = \frac{z}{Mt} = \frac{\sqrt{abx}}{2\sqrt{(4x+a)}}$ (ainsi qu'on l'a vu ci-dessus 125) : $MO = \frac{z}{Mt} = \frac{\sqrt{abx}}{2\sqrt{(4x+a)}}$. Si l'on suppose $x = 0$, l'on aura $MO = \frac{b}{2}$; Si l'on fait $x = \infty$, l'on a $MO =$

$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{abx}{4x}} = 0$; donc à l'infini la tangente de la courbe à double courbure est parallèle au plan de la base.

127. PROBLÈME. Supposant que RN (Fig. 50), est une courbe à double courbure, telle que la courbe de projection sur le plan de la base soit la parabole de l'équation $ax = y^2$ & la courbe de projection sur le plan RAQ des y & des z , le cercle de l'équation $y^2 = aa - zz$, trouver la valeur de la sous-tangente de cette courbe. En prenant la valeur de z & de dz en x & dx , celle de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on a trouvée (125) $= dx \sqrt{\frac{4x+a}{4x}}$ & la valeur de $z^2 = aa - y^2 = aa - ax$ (à cause de $y^2 = ax$),

l'on aura $z = \sqrt{(aa - ax)}$, $dz = \frac{-a dx}{2\sqrt{(aa - ax)}}$,

& $\frac{z}{dz} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \cdot (a - x) \times \sqrt{\frac{4x+a}{4x}}$

$$= - \frac{2 \cdot (a-x) \cdot \sqrt{(4xx+ax)}}{2x} = - \frac{(a-x) \cdot \sqrt{(4xx+ax)}}{x};$$

donc on trouvera la sous-tangente demandée que j'appellerai S , en prenant une ligne $= \sqrt{(4xx+ax)}$, tangente de la parabole, supposant cette ligne $= u$, & faisant $x : u :: a-x : S$; mais on prendra S de l'autre côté de M par rapport à T à cause du signe $-$.

128. PROBLÈME. Trouver la sous-normale de la courbe RN dans la même supposition. Si l'on appelle cette sous-normale R , & que l'on fasse la sous-tangente $S : z :: z : R$,

$$\text{l'on aura } R = \frac{zz}{S} = \frac{x \cdot (aa-ax)}{-(x-a) \cdot \sqrt{(4xx+ax)}}$$

$$= \frac{-ax}{\sqrt{(4xx+ax)}}, \text{ qui se réduit à } \frac{-aa}{\sqrt{5aa}} = -a\sqrt{\frac{1}{5}},$$

en supposant $x=a$. La sous-normale doit être prise du côté de A , parce qu'elle est négative.

Lorsque $x=a$, l'on a $z^2 = aa-ax=0$, & $z=0$; donc la courbe à double courbure doit rencontrer le plan de la base au point C correspondant à $x=a$.

129. PROBLÈME. Rectifier une courbe à double courbure AN (Fig. 49). Le triangle rectangle Nhn donne l'élément Nn (de la courbe à double courbure) $= \sqrt{((nh)^2 + (Nh)^2)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, $Nh = Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $Nn = \sqrt{(dz^2 + dx^2 + dy^2)}$. On éliminera, par le moyen des équations des courbes de projection, toutes les différentielles excepté une, & intégrant ensuite, l'on aura la valeur de l'arc AN .

130. PROBLÈME. Rectifier la courbe à double courbure, dont l'équation de la courbe de projection sur le plan de la base est $(y^2 - 2aa)^3 = 9a^4x^2$, l'équation de la courbe de projection sur le plan des y & des z étant $y^2 = az$. La

$$\text{première équation donne } x = \frac{(yy-2aa)^{\frac{1}{3}}}{3aa}, \quad dx =$$

$$\frac{y dy}{3aa} \cdot (y^2 - 2aa)^{-\frac{2}{3}}. \text{ La seconde équation donne } z =$$

$$\frac{yy}{a}, \quad dz = \frac{2y dy}{a}. \text{ Substituant ces valeurs de } dx \text{ \& de } dz$$

dans l'élément $\sqrt{dz^2 + dx^2 + dy^2}$, l'on a, toute réduction faite, $\frac{yydy + a^2dy}{aa}$, dont l'intégrale est, $\frac{y^3}{3aa} + y + C$.

Pour déterminer la constante C , je remarque que l'arc de la courbe doit être $\cong 0$, lorsque $x \cong 0$; mais $x \cong \frac{(yy - 2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; donc alors $y^2 \cong 2aa$, $y \cong a\sqrt{2}$; donc puisque, lorsque $x \cong 0$, l'intégrale doit être $\cong 0$; l'on aura $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3aa} + a\sqrt{2} + C \cong 0$, ou $\frac{2a\sqrt{2}}{3} + a\sqrt{2} + C \cong 0$, ou $C \cong -\frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Ainsi l'intégrale complète est $\frac{y^3}{3aa} + y - \frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Telle sera la valeur de l'arc de la courbe à double courbure, compris entre l'origine de la courbe & le point auquel répond l'ordonnée y .

Si l'on fait $y \cong 0$, l'on a $x \cong \frac{(-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; mais $(-2aa)^{\frac{3}{2}} \cong \sqrt{(-8a^6)}$, quantité imaginaire; donc on ne peut pas supposer $y \cong 0$. On ne peut pas supposer non plus $z \cong \frac{yy}{a} \cong 0$; ainsi l'origine de la courbe à double courbure ne sçauroit être sur le plan de la base. Mais parce que $x \cong 0$, donne $y^2 \cong 2aa$, l'on a alors $z \cong \frac{2aa}{a} \cong 2a$. Par conséquent cette origine est éloignée au-dessus du plan de base de la quantité $2a$.

131. PROBLÈME. Soit la courbe à double courbure AN (Fig. 51), dont les axes sont AP , AR , AQ & deux de ses courbes de projection AM , & $AV \cong PN$, on demande de trouver la valeur de l'espace APN qui est une partie de la surface

cylindrique $AVNP$ * élevée sur la courbe AV , déterminé par la courbe à double courbure, par l'axe AP & la courbe $PN = AV$. Je prends $Pp = dx$, je mène l'ordonnée pn & je décris la courbe pn dont le plan est perpendiculaire à celui de la base, & parallèle à ceux des courbes AV & PN . La petite surface $Nn Pp$ sera l'élément de la surface cherchée. En menant NG parallèle à AP , & retranchant le petit triangle NnG (qui dispa- roit devant $Pp N G$), l'élément de la surface cherchée sera $Pp N G$. Mais cet élément est le produit de $Pp = dx$ par la courbe $PN = AV$, & les co- ordonnées de cette courbe étant y & z , l'élément de cette courbe sera $= \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$; donc cette courbe $= S. \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$, & l'élément de la surface cherchée est $= dx. S. \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$.

Si l'on réduit cet élément à une seule variable, & qu'on intègre, l'on aura la surface cherchée.

132. PROBLÈME. En supposant que la courbe de projection AM soit une parabole dont l'équation soit $y^2 = ax$, & que la courbe de projection $AV = PN$ soit une autre parabole, dont l'équation soit $x^3 = az^2$, on demande la valeur de la surface APN renfermée entre la courbe à double courbure, la parabole cubique PN & l'axe AP . L'on aura x

$$= \frac{y^2}{a} \text{ \& } z = \frac{y^2}{a^{\frac{1}{2}}}, dx = \frac{2y dy}{a} \text{ \& } dz = \frac{\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}; \text{ donc}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{5 dy \sqrt{(y + \frac{4}{9}a)}}{2 a^{\frac{1}{2}}}, \text{ \& } S. \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$$

$$= \frac{(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}, \text{ en intégrant par la règle fondamentale;}$$

$$\text{donc } dx S. \sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}}} (y + \frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}} = \frac{2y dy}{a^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}}, \text{ en substituant la valeur } \frac{2y dy}{a} \text{ de } dx.$$

* Par cylindre on entend ici un solide dont la grosseur est uniforme dans toute sa longueur.

Je remarque maintenant qu'en augmentant d'une unité l'exposant 1 sous-entendu de la variable y hors du signe, & le divisant ensuite par l'exposant 1 sous-entendu de la variable y sous le signe, le quotient donne un nombre entier positif; ainsi (1), cette différentielle est intégrable. L'on a vu ci-dessus (1), que la différentielle $ax^{m \cdot n + n - 1} dx$

$(b + gx^n)^p$, devenoit (en faisant $(b + gx^n)^{\frac{1}{p}} = z$) $\frac{a}{n \cdot p \cdot g^{m + 1} x}$

$z^{\frac{1}{p}} dz \cdot (z^{\frac{1}{p}} - b)^m$. Si dans cette formule on fait $m = 1$ & qu'on intègre en négligeant le facteur constant,

l'intégrale sera $\int dz \cdot (z^{\frac{1}{p}} - b)^{\frac{1}{p}} = \frac{z^{\frac{1}{p} + 1}}{\frac{1}{p} + 1} -$

$\frac{b}{\frac{1}{p} + 1} \cdot z^{\frac{1}{p} + 1}$. Mais si dans la différentielle $ax^{m \cdot n + n - 1} dx$

$dx (b + gx^n)^p$, l'on change x en y , dx en dy , qu'on fasse $b = \frac{4}{9} a$, $g = 1$, & qu'on change le facteur constant a en $\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}}$, p en $\frac{3}{2}$, que l'on multiplie l'intégrale

que l'on vient de trouver par le facteur constant qu'on a eu ci-dessus (1), ou par $\frac{a}{n \cdot p \cdot g^{m + 1}}$, qui parce que a

est ici représenté par $\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}}$, p par $\frac{3}{2}$, que $n = 1$, & $g = 1$,

sera $\frac{4}{3 a^{\frac{1}{3}}}$, l'on aura, à cause de $z = (y + \frac{4}{9} a)^{\frac{1}{2}}$, l'on

aura, dis-je, toute réduction faite, l'intégrale cherchée

$= \frac{4}{3 a^{\frac{1}{3}}} (y + \frac{4}{9} a) \cdot (y + \frac{4}{9} a)^{\frac{3}{2}}$. Pour savoir si cette

intégrale est complète, je remarque qu'elle doit être = 0,

lorsque $y = 0$; mais alors elle devient $= -\frac{1024 \cdot aa}{76545}$.

donc la constante qu'il faut ajouter est $+\frac{1024 \cdot aa}{76545}$.

& l'intégrale complete est $\frac{4}{7a^{\frac{1}{2}}} (y - \frac{3}{45}) \cdot a (y + \frac{4}{9}a)^{\frac{1}{2}} +$

$\frac{1024 \cdot aa}{76545}$. Telle est la valeur de la surface A P N.

133. PROBLEME. Trouver la surface cylindrique A V N P. Cette surface étant le produit de A P par l'arc P N, sera $= x S \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$.

COROLLAIRE. Si A u est une demi-cicloïde dont le diamètre du cercle générateur soit a, A u sera $= 2a$ & la surface cylindrique A u n p sera $= 2ax$. Si $x = a$, cette surface sera $2 \cdot aa$, ou double du quarré du diamètre du cercle générateur.

134. PROBLEME. Trouver l'espace A V N compris entre la courbe à double courbure A N, la courbe de projection A V, & la ligne V N parallèle à A P. Si de la surface cylindrique A P N V, on retranche la surface A N P, l'on aura la surface cherchée $= x S \sqrt{(dy^2 + dz^2)} - \int dx S \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$.

135. PROBLEME. Étant donnée la courbe à double courbure A N avec ses axes & ses équations, trouver le solide A P M N déterminé par le plan M N P, la base A P M & les surfaces courbes A P N & A M N. Le petit solide M P p m n N, compris entre les deux plans P M N & p m n, étant l'élément du solide cherché, il s'agit de trouver son expression. Pour cela, je remarque que cet élément est un prisme dont la base est le plan P M N & la hauteur P p. Or l'élément du plan P M N est $= z dy$; car lorsque l'ordonnée de la courbe est y & l'abscisse x, l'élément de l'aire de la courbe est y dx; donc lorsque l'ordonnée M N est z & que l'abscisse P M est y, l'élément de l'aire doit être $= z dy$; donc la base de notre solide élémentaire sera $= S \cdot z dy$, le solide élémentaire sera $= dx S \cdot z dy$ & le solide cherché sera $S \cdot dx \cdot S \cdot z dy$. Pour pouvoir intégrer, on réduira, par le moyen de la courbe P N, la valeur de $S \cdot z dy$ en z & ensuite en x ou d'abord en y & ensuite en x, par le moyen de l'équation de la courbe A M afin que l'élément ne contienne qu'une seule variable x, ou bien, on tâchera d'exprimer l'élément par une seule variable z, par exemple, & la différentielle dz, en éliminant dx & dy.

136. PROBLEME. Supposant que la courbe de projection sur le plan de la base est la parabole de l'équation $ax = y^2$, &

la courbe de projection sur le plan des y & des z la parabole de l'équation $z z = b y$, on demande le solide $A M N P$. L'on aura $z = \sqrt{b y}$; donc l'élément $d x . S . z d y$, sera $= d x . S . d y \sqrt{b y}$, ou $d x . S . d y \sqrt{b \sqrt{a x}}$, parce que $y = a x$. Mais de l'équation $y = \sqrt{a x}$, l'on tire $d y = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} d x = \frac{1}{2} \frac{a d x}{\sqrt{a x}}$; donc en substituant

l'on aura $d x . S . d y \sqrt{b y} = \frac{1}{2} d x . a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} S . x^{-\frac{1}{4}} d x$.*

Or $S . x^{-\frac{1}{4}} d x = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}$; donc l'élément sera $\frac{1}{2} . \frac{4}{3} . a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{3}{4}} d x$, dont l'intégrale est $\frac{2}{11} . a^{\frac{3}{4}} . b^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{7}{4}}$, valeur du solide proposé. Si l'on veut l'exprimer en y , on substituera la valeur de x prise de l'équation $y^2 = a x$ & si l'on substitue ensuite la valeur de y en z , on l'exprimera par une fonction de z .

137. PROBLEME. Trouver la valeur du prisme $AVNMP$, compris entre les plans AVQ & PMN . Si l'on multiplie l'aire PMN par $AP = x$, le solide cherché sera $= x . S . z d y$.

COROLLAIRE I. Si la courbe $AV = PN$ est une parabole dont z soit l'ordonnée & y l'abscisse, l'aire PMN sera $= \frac{2}{3} z y$ & le prisme demandé sera $= \frac{2}{3} x z y$.

138. COROLLAIRE II. Si du prisme $x . S . z d y$, l'on retranche le solide $AMNP$, l'on aura le solide $AVMN = x S . z d y - S . d x S . z d y$. C'est l'expression du solide qui manque au solide $AMNP$ pour égaler le prisme $APMN$.

139. PROBLEME. Étant donnée la courbe à double courbure AN (Fig. 52) & ses courbes de projection sur le plan de la base & sur celui des y & des z , trouver le solide $AMNVQ$, en supposant que l'on ne connoît ni le prisme

* On doit faire attention que $\sqrt{b . \sqrt{a x}} = \sqrt{\sqrt{b} . b \sqrt{a x}} = \sqrt[4]{b b a x} = b^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, & que $\sqrt{a x} = \sqrt[4]{a a x x} = a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}}$.

$APMN VQ$, ni le solide $APMN$. Je mène le plan $unmq$ parallèle au plan $VNMQ$ & infiniment proche de ce dernier plan; l'élément du solide cherché sera $VunNMmq$. Si l'on fait passer les plans $VfgN$, $NLgKM$ par les lignes VN , NM , ces plans retrancheront les petits solides $VufgLN$, $nLNMKmq$ qui sont inassignables respectivement au prisme $VfgNMKqQ$ qu'on peut regarder comme l'élément du solide demandé. Pour avoir l'expression de cet élément, je multiplie Qq par le rectangle $VNMQ = x \cdot z$. Mais $Qq = dy$; donc cet élément est $xz dy$.

COROLLAIRE. Donc le solide $APMN = x \cdot S \cdot z dy = S \cdot xz dy$. Autre expression différente de celle qu'on a trouvée ci-dessus (135), pour le même solide,

140. PROBLÈME. Supposant que la courbe AM (qui est la courbe de projection de la courbe à double courbure sur le plan de la base) est la parabole de l'équation $ax = y^2$, & que la courbe AV de projection sur le plan des y & des z est l'hyperbole équilatère dont l'équation est $zy = a^2$, l'on demande le solide $AMNVQ$. L'équation $ax = y^2$ donne

$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}, dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{a dx}{\sqrt{ax}}. \text{ L'équation}$$

$$zy = a^2 \text{ donne } z = \frac{a^2}{y} = \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ax}}. \text{ Substi-}$$

tuant les valeurs de z & de dy , qu'on vient de trouver dans $xz dy$, l'élément du solide demandé sera

$$x \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ax}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a dx}{\sqrt{ax}} = \frac{1}{2} x \cdot \frac{a^3 dx}{ax} = \frac{1}{2} \cdot a^2 dx, \text{ dont}$$

l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x$ est la valeur du solide cherché.

Si dans cette intégrale l'on substitue à la place de x

sa valeur $\frac{y^2}{a}$ prise de l'équation $ax = y^2$, l'on aura

$\frac{1}{2} a y^2$ pour la valeur du solide cherché.





SECTION III.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES ET DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

NOUS diviserons cette Section en deux parties. Dans la première nous traiterons de l'intégration des formules & des équations différentielles à une & à plusieurs variables. Nous parlerons dans la seconde de quelques méthodes d'intégrer peu connues, du calcul des variations & de ses applications.

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA TROISIÈME SECTION.

I. **N**OUS parlerons d'abord de l'intégration des différentielles à une seule variable, & de celles qui ne contiennent qu'une seule variable dans chacun de leurs termes. Nous passerons ensuite aux différentielles à plusieurs variables. Mais avant d'entrer en matière, nous remarquerons que, selon ce qu'on a dit dans la section précédente (1), l'intégrale de $m x^{m-1} dx$, ou $S. m x^{m-1} dx$ est $= x^m$, $S. \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{y}{x}$, $S. \frac{dx}{x} = L. x$, $S. (y dx + x dy) = xy$. L'on a vu aussi dans

l'endroit cité, que l'on pouvoit trouver l'intégrale d'une différentielle binome $a x^m dx (b + g x^n)^p$ toutes les fois que p est un nombre entier positif. De même toute différentielle de cette forme $a x^m dx (b + g x^n + f x^r + h x^i + \&c.)^p$, sera intégrable algébriquement ou par logarithmes, toutes les fois que p sera un nombre entier positif, & que le polinome qui est sous le signe ne contiendra qu'un nombre fini de termes; car alors on n'aura à intégrer que des quantités de la forme $Bx^R dx$, dont l'intégrale est $\frac{B}{R+1} \cdot x^{R+1}$.

Mais si $R = -1$, l'intégrale de $Bx^R dx$ sera $= BL.x$. L'on a vu aussi dans le même endroit, que l'on peut intégrer toute différentielle binome telle que l'exposant de la variable hors du signe augmenté d'une unité étant divisé par l'exposant de la variable sous le signe donnera pour quotient un nombre entier positif. Il en sera de même si la différentielle binome ne se trouvant pas dans ce cas peut (sans changer de valeur) y être ramenée, en changeant l'exposant de la quantité sous le signe de positif en négatif, ou réciproquement. Ce sera la même chose si en multipliant hors du signe & divisant sous le signe, ou si en divisant hors du signe & multipliant sous le signe, la différentielle peut, sans changer de valeur, être ramenée à cette forme $a x^{m \cdot n + n - 1} dx \cdot (b + g x^n)^p$, ou à celle-ci $a x^{m \cdot n - 1} dx (b + g x^n)^p$, m étant un nombre entier positif ou 0 dans le premier cas, & un nombre entier positif dans le second: car en augmentant d'une unité l'exposant de la quantité hors du signe, l'on a dans le premier cas $m \cdot n + n$, qui est divisible par n , &

& donne pour quotient $m \div n$. Dans le second cas, divisant $m \cdot n$ par n , l'on a m pour quotient. Donc dans l'un & l'autre cas les quotients seront des nombres entiers positifs. On peut aussi voir facilement qu'on intègre par la règle fondamentale, toute formule dont la quantité hors du signe (ce signe peut indiquer une racine ou une puissance) est la différentielle de la quantité sous le signe, exactement, ou même à un multiplicateur constant près, ce qui peut avoir lieu toutes les fois que la différentielle est de cette forme $a x^{m-1} dx$, ou peut y être ramené. La différentielle $x dx \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ est dans ce cas, parce que $x dx$ est la différentielle de la quantité sous le signe, à un multiplicateur constant près qui est 2, & son intégrale est $\frac{1}{2} \cdot \frac{x dx (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{2 x dx} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Quand pour abréger nous n'ajouterons point de constante, on devra toujours en supposer une.

2. L'on peut préparer la formule $dx \times \sqrt{(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3)}$ en prenant la racine du facteur $a^2 + 2ax + x^2$ & écrivant la différentielle de cette manière $(a dx + x dx) \times \sqrt{(a + x)} = dx \cdot (a + x)^{\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{3} (a + x)^{\frac{3}{2}}$. Mais pour préparer la formule $(3ax^2 dx + 4x^3 dx) \cdot \sqrt{(ax + x^2)}$, il faut diviser hors du signe par x , & multiplier la quantité sous le signe par x^2 ; c'est-à-dire, par x élevé à l'exposant du signe, parce que x^2 sous le signe est la même chose que x hors du signe. L'on aura

donc $(3ax^2 dx + 4x^3 dx) \times \sqrt[3]{(ax^3 + x^4)}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, est $\frac{1}{3} \cdot (ax^3 + x^4)^{\frac{1}{3}}$. Quelquefois une formule différentielle peut être préparée en multipliant ou en divisant le numérateur & le dénominateur par une même quantité. La fraction $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(3a^2 + 2x)}}$, devient, en multipliant le numérateur & le dénominateur par x , $\frac{ax dx + xxdx}{\sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}}$, dont l'intégrale $= \frac{1}{3} \sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}$, comme il est aisé de le voir, en différentiant cette intégrale.

Pour préparer la formule $\frac{dx \cdot (a + x)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(2a^2x + 3ax^2 + x^3)}}$, je divise le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{(a+x)}$, & j'ai $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = (adx + xdx) \times (2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, est $= (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2ax + xx)}$.

Il est souvent utile d'ajouter à une formule différentielle & d'en retrancher en même tems une même fonction intégrable. Soit la formule $xdx \cdot (a + x)^n$, & supposons qu'on ne sache pas comment il faut s'y prendre pour l'intégrer. En ajoutant & retranchant $adx \cdot (a + x)^n$, dont nous connoissons l'intégrale, il vient $xdx \times (a + x)^n + adx \cdot (a + x)^n - adx \cdot (a + x)^n$,

dont l'intégrale est $\frac{(a+x)^{m+2}}{m+2} - \frac{a \cdot (a+x)^{m+1}}{m+1}$

$$= (A) \left(\frac{a+x}{m+2} - \frac{a}{m+1} \right) \cdot (a+x)^{m+1} =$$

$$\left(\frac{(m+1) \cdot x - a}{(m+2)(m+1)} \right) \cdot (a+x)^{m+1}. \text{ En effet en}$$

différentiant l'intégrale A, l'on a $\frac{d x}{m+2} \cdot (a+x)^{m+1}$

$$+ (m+1) \cdot \left(\frac{a+x}{m+2} - \frac{a}{m+1} \right) \cdot (a+x)^m d x.$$

Mais $(a+x)^{m+1} = (a+x) \cdot (a+x)^m =$
 $a \cdot (a+x)^m + x \cdot (a+x)^m$; donc notre diffé-

rentielle devient $\frac{d x}{m+2} \cdot a \cdot (a+x)^m +$

$$\frac{x d x \cdot (a+x)^m}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} d x \cdot a (a+x)^m$$

$$+ \frac{m+1}{m+2} \cdot x \cdot d x \cdot (a+x)^m - \frac{m+1}{m+1} \times$$

$$a \cdot (a+x)^m d x = \frac{m+1+1}{m+2} \cdot x d x \times$$

$$(a+x)^m + \frac{m+1+1}{m+2} \cdot a d x \cdot (a+x)^m$$

$$- \frac{m+1}{m+1} \cdot a \cdot d x \cdot (a+x)^m = x d x \cdot (a+x)^m$$

$$+ a d x \cdot (a+x)^m - a d x \cdot (a+x)^m =$$

$$x d x \cdot (a+x)^m.$$

3. Il est souvent utile de partager une formule différentielle en deux parties pour la comparer à la formule $x d y + y d x$, dont l'intégrale est $= xy$. Qu'on propose, par exemple, la formule —

$$\frac{a^2 d x}{x x \sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ je la dispose ainsi}$$

$\frac{(-aa + xx - xx) \cdot dx}{x^2 \sqrt{aa - xx}}$; Je partage celle-ci

de cette manière $\frac{dx \sqrt{aa - xx}}{x^2} - \frac{x dx}{x \sqrt{aa - xx}}$

(ces fractions étant réduites au même dénominateur rendront la formule dont elles sont les parties), ou $\sqrt{aa - xx} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \times$

$d \cdot \sqrt{aa - xx}$ (la lettre d indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité qui est à sa droite), dont l'intégrale sera $\frac{1}{x} \sqrt{aa - xx}$, quan-

tité dont la différentielle est $\sqrt{aa - xx} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right)$

$+ \frac{1}{x} d \sqrt{aa - xx}$. Si on suppose $x =$

$\sqrt{aa - xx}$, & $y = \frac{1}{x}$, dans la formule ci-dessus

$xdy + ydx$, on verra aisément que $\sqrt{aa - xx} \times$

$d\left(\frac{1}{x}\right)$ est $= xdy$, & que $\frac{1}{x} d \sqrt{aa - xx} =$

$y dx$, & parce que yx est l'intégrale de $x dy +$

$y dx$, notre intégrale sera $\frac{1}{x} \sqrt{aa - xx}$.

4. Pour avoir l'intégrale d'une formule différentielle, il faut quelquefois élever des binomes ou des polinomes à des puissances. Par exemple,

pour avoir l'intégrale de la formule $x^{\frac{1}{2}} dx (a - x)^2$, j'éleve $a - x$ au quarré, & je multiplie tous les

termes de ce quarré par $x^{\frac{1}{2}} dx$, ce qui donne $a^2 x^{\frac{1}{2}} dx - 2ax^{\frac{3}{2}} dx + x^{\frac{5}{2}} dx$. Prenant main-

tenant l'intégrale de chaque terme, j'ai $\frac{3}{4} a^2 x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7} a x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}}$.

5. Il faut quelquefois employer les substitutions pour changer une formule dont on ne connoit pas l'intégrale en une autre qu'on sache intégrer. On peut aussi quelquefois, par le moyen des substitutions changer une formule irrationnelle en rationnelle & intégrer ensuite facilement, comme nous le ferons voir par plusieurs exemples.

Soit la formule $\frac{a dx + x dx}{\sqrt{(2ax + xx)} \cdot \sqrt{(a + \sqrt{(2ax + xx)})}}$.

Pour la réduire à une forme plus simple, je suppose $\sqrt{(2ax + xx)} = z$; donc $(2ax + xx) = z^2$, $2a dx + 2x dx = 2z dz$, $a dx + x dx = z dz$; donc en substituant z & $z dz$ à la place des quantités qu'elles représentent, la formule proposée deviendra $= \frac{z dz}{z \sqrt{(a + z)}} = \frac{dz}{\sqrt{(a + z)}} =$

$dz \cdot (a + z)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est $2(a + z)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a + z)} = 2\sqrt{(a + \sqrt{(2ax + xx)})}$.

Soit la formule $\frac{-aa dx}{(xx - aa)^{\frac{3}{2}}}$, que j'écris ainsi

$\frac{aa}{x} \times \frac{-x dx}{(xx - aa)^{\frac{3}{2}}}$. Parce que $\frac{-x dx}{(xx - aa)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable algébriquement, je fais son intégrale $\frac{1}{\sqrt{(xx - aa)}} = \frac{z}{aa}$; ainsi $\frac{-x dx}{(xx - aa)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dz}{aa}$, &

la formule proposée devient $\frac{dz}{x}$. Pour trouver x , j'élève au carré la formule de substitution, &

J'ai $\frac{1}{xx - aa} = \frac{z^2}{a^4}$, ou $\frac{a^4}{z^2} = xx - aa$, ou
 $xx = aa + \frac{a^4}{z^2} = \frac{az^2 + a^4}{z^2}$, $x = \frac{a}{z} \sqrt{(z^2 + aa)}$.

Substituant cette valeur de x dans $\frac{dz}{x}$, la formule
proposée sera $= \frac{z dz}{a \sqrt{(aa + zz)}}$, dont l'inté-
grale est $= \frac{1}{a} \cdot (aa + zz)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(aa + zz)}}{a}$
 $= \frac{x}{\sqrt{(xx - aa)}}$ *. Il n'y a aucune règle pour

connoître quelle substitution on doit employer dans
tous les cas pour changer une formule différentielle
qui ne paroît pas intégrable en une autre qu'on
puisse facilement intégrer : l'usage & l'industrie du
calculateur doivent suppléer aux règles.

Soit la formule $\frac{dx}{x \sqrt{(ax - xx)}}$. Pour que cette
formule soit rationnelle, il faut que $\sqrt{(ax - xx)}$
soit un quarré. Je fais $ax - xx = \frac{a^2 x^2}{z^2}$;
ce qui donne $x = \frac{az^2}{a^2 + z^2}$; donc $\sqrt{(ax - xx)}$
 $= \frac{ax}{z} = \frac{a^2 z}{a^2 + z^2}$, $dx = \frac{2a^3 z dz}{(aa + zz)^2}$, & fai-
sant les substitutions, la formule proposée devient

* Lorsque pour abrégé l'on n'ajoute point de const-
tante, le lecteur doit y suppléer; à l'égard de sa déter-
mination, elle dépend, dans chaque cas particulier, de
la nature du Problème qui a donné cette intégrale.

$\frac{2 dz}{z^2}$, dont l'intégrale est $-\frac{2}{z}$. Mais $z =$

$\frac{ax}{\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}}$. Donc l'intégrale de la formule proposée sera $= -\frac{2\sqrt{(a - x)}}{a\sqrt{x}}$.

6. PROBLÈME. Trouver l'intégrale de la formule $(x + \sqrt{(1 + xx)})^n dx$. Je fais $x + \sqrt{(1 + xx)} = z$; donc $x = \frac{zz - 1}{2z}$, $dx = \frac{dz(zz + 1)}{2zz}$;

ainsi la formule proposée devient $= \frac{1}{2} z^{n-2} dz \times (zz + 1) = \frac{1}{2} z^n dz + \frac{1}{2} z^{n-2} dz (A)$, dont l'intégrale est $= \frac{z^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{z^{n-1}}{2(n-1)} + C$. Si

on avoit eu $n = 1$, ou $n = -1$, l'un ou l'autre terme de la différentielle A auroit eu un exposant $= -1$; ainsi l'on auroit intégré ce terme par les logarithmes.

7. THÉORÈME. Toute différentielle $dx \times (a + bx^p + cx^m + gx^l + \text{etc.})^p$, p étant un nombre entier, & les exposans de x dans les termes particuliers étant tous fractionnaires, ou en partie entiers & en partie fractionnaires, peut toujours être rendue rationnelle.

Supposons que n & m soient seulement fractionnaires, l étant entier, & que n soit $= \frac{r}{i}$, fraction irréductible, $m = \frac{t}{u}$ autre fraction irréductible, je cherche un nombre entier h qui soit divisible exactement par i & par u , & je suppose $x = z^h$: donc $dx = h z^{h-1} dz$; par conséquent en substituant z^h au

lieu de x & $h z^{b-1} dz$, au lieu de dx , la différentielle du théorème sera $h z^{b-1} dz \times (a + b z^{\frac{r}{i}} + c z^{\frac{s}{u}} + g z^{b'})^p$; or h étant divisible par i & par u , le second & le troisième termes seront affectés d'exposants entiers. Donc la formule substituée sera rationnelle. Si l avoit été un exposant fractionnaire $= \frac{v}{s}$, on auroit pris pour h un nombre entier divisible à la fois par i , u & s , & ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre d'exposans fractionnaires.

8. PROBLÈME. Intégrer la différentielle $\frac{dy \sqrt{y + b dy}}{y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$. Je change \sqrt{y} en $y^{\frac{1}{2}}$, & je

réduis les exposans $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ au même dénominateur, ce qui donne $\frac{4}{2}$ & $\frac{1}{2}$. Donc la formule pro-

posée devient $\frac{dy \cdot y^{\frac{3}{2}} + b dy}{y^{\frac{4}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$. Je suppose $y =$

z^6 (6 est divisible par 3 & par 2); donc $dy = 6 z^5 dz$, & la formule proposée devient

$$\frac{6 z^8 dz + 6 b z^5 dz}{z^4 + z^3} = \frac{6 z^5 dz + 6 b z^2 dz}{z + 1}. \text{ Je par-}$$

tage cette dernière formule de cette manière

$$\frac{6 dz \cdot z^5}{z + 1} + \frac{6 b dz \cdot z^2}{z + 1}. \text{ Je divise } z^5 \text{ par } z + 1.$$

Je trouve d'abord (en prenant z pour le premier terme du diviseur) z^4 pour quotient; multipliant le diviseur par le quotient, & retranchant le produit du dividende z^5 , il reste $-z^4$, que je divise de même pour avoir $-z^3$ au quotient. Retranchant

encore le produit du diviseur par le quotient, j'ai $+z^3$ pour reste, je continue la division jusqu'à ce que le reste soit 1, & divisant ce reste par $z+1$, le quotient sera (A) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 + \frac{1}{z+1}$. De même $\frac{z^2}{z+1} = z - 1 + \frac{1}{z+1}$ (B). Multipliant tous les termes du quotient A, par $6dz$, & intégrant, l'on aura $\frac{6}{5}z^5 - \frac{6}{4}z^4 + \frac{6}{3}z^3 - \frac{6}{2}z^2 + 6z + 6.L.(z+1)$. Multipliant tout de même les termes du quotient B par $6bdz$, & intégrant, l'on a $\frac{6bz^2}{2} - 6bz + 6b.L.(z+1)^*$; joignant ensemble cette suite de termes l'on aura l'intégrale totale. Si l'on veut l'exprimer en y , l'on substituera la valeur de z en y .

Soit la différentielle $y^n dy (b + gy^n)^p$. Pour savoir dans quel cas cette formule est exactement intégrable, je fais $(b + gy^n)^p = z^r$, r étant indéterminée; donc $b + gy^n = z^{\frac{r}{p}}$, $y^n = \frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}$, $y = \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{1}{n}}$, $y^n = \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{n}{n}}$, $dy = \frac{r}{npg} z^{\frac{r}{p}-1} dz \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{1}{n}-1}$; donc la formule proposée devient $= \frac{r}{npg} z^{\frac{r}{p}+r-1} dz \times \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}-1}$, qui est intégrable lorsque $\frac{n}{n}+\frac{1}{n}-1 = 1$.

* L désigne le logarithme hyperbolique.

$\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier positif, ou 0.

Si $\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier négatif, la formule sera rationnelle en supposant $r=p$. Si $p=\frac{u}{2}$, u étant un nombre impair positif ou négatif, & $\frac{m+1}{n} = u$. La formule pourra être rendue rationnelle, en suivant la méthode du théorème précédent.

9. PROBLÈME. Dans quel cas peut-on rendre rationnelle

la formule $x^{m-1} dx (a + b x^n)^{\frac{u}{v}}$, u & v étant des nombres entiers. Si $v=1$, il est visible que la formule sera rationnelle, pourvu que m & n soient rationnelles, mais si $\frac{u}{v}$ est une fraction irréductible, il faut employer une double substitution. Qu'on fasse $a + b x^n = z^v$; donc $(a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = z^u$, $x^n = \frac{z^v - a}{b}$; ainsi $x^m = \left(\frac{z^v - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$.

& $x^{m-1} dx (a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{v}{b^n} z^{u+v-1} dz \times \left(\frac{z^v - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$, ce qui fait voir que toutes les fois que $\frac{m-n}{n} = \frac{m}{n} - 1$, ou $\frac{m}{n}$ seront des nombres entiers, cette formule sera rationnelle. Supposons en second lieu que $a + b x^n = x^n z^v$, ce qui donne $x^n = \frac{a}{z^v - b}$,

$$(a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{a^{\frac{u}{v}} z^u}{(z^v - b)^{\frac{u}{v}}}, \quad x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^v - b)^{\frac{m}{n}}};$$

donc $x^{m-1} dx = \frac{-va^n z^{v-1} dz}{n(z^v - b)^{\frac{m}{n} + 1}}$; donc la for-

mule proposée se change en celle-ci $\frac{-va^n z^{\frac{m}{n} + \frac{v}{v} - 1} dz}{n(z^v - b)^{\frac{m}{n} + \frac{v}{v} + 1}}$

qui sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n} + \frac{v}{v}$, sera un nombre entier.

Ainsi l'on peut rendre rationnelle la différentielle proposée toutes les fois que $\frac{m}{n}$ & $\frac{m}{n} + \frac{v}{v}$, sont des nombres entiers.

10. Si l'on a une formule différentielle $X dx$, X étant une fonction de x qui ne contienne que des fonctions fractionnaires $(e + fx)^{\frac{m}{n}}$, $(e + fx)^{\frac{u}{v}}$, &c. du binôme $e + fx$, on la rendra rationnelle en supposant $e + fx = z$: car par cette substitution, l'on a $x = \frac{z - e}{f}$, $dx = \frac{dz}{f}$, $(e + fx)^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{m}{n}}$, $(e + fx)^{\frac{u}{v}} = z^{\frac{u}{v}}$.

Donc si $X = ((e + fx)^{\frac{m}{n}} + (e + fx)^{\frac{u}{v}} + \&c.)^p$, p étant un nombre entier, l'on aura $X = (z^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{u}{v}} + \&c.)^p$, qu'on rendra rationnelle par la méthode ci-dessus (7). Si les binômes étoient multipliés les uns par les autres, & qu'il n'y en eût que deux, l'on auroit $X = z^{\frac{m}{n} + \frac{u}{v}} = z^s$, en faisant $\frac{m}{n} + \frac{u}{v} = s$,

& la formule proposée seroit $= \frac{1}{f} \cdot z^s dz$, qui est intégrable algébriquement toutes les fois que s n'est

pas $= -1$. Si s étoit $= -1$, son intégrale seroit $\frac{1}{f} \cdot L \cdot z$.

Si outre les fonctions fractionnaires dont on vient de parler X , contenoient encore des fonctions rationnelles de x , il est aisé de voir qu'on pourroit la rendre rationnelle par la même méthode. De même si X ne contenoit que des fonctions rationnelles de x , & des

puissances fractionnaires $\left(\left(\frac{e+fx}{a+bx} \right)^{\frac{m}{n}} \pm \left(\frac{e+fx}{a+bx} \right)^{\frac{n}{v}} \pm \&c. \right)^p$ De la quantité $\left(\frac{e+fx}{a+bx} \right)$, combinées ensemble par addition, ou par soustraction, on rendroit la formule rationnelle en faisant $\frac{e+fx}{a+bx} = z$:

car on auroit $x = \frac{az-e}{f-bz}$, $dx = \frac{adz(f-bz) + b dz(az-e)}{(f-bz)^2}$.

En supposant pour plus de simplicité, que X ne contienne

que les formules $\left(\frac{e+fx}{a+bx} \right)^{\frac{m}{n}}$ & $\left(\frac{e+fx}{a+bx} \right)^{\frac{n}{v}}$, p étant toujours un nombre entier, la formule deviendra

$$\left(z^{\frac{m}{n}} \pm z^{\frac{n}{v}} \right)^p \times \frac{adz(f-bz) + b dz(az-e)}{(f-bz)^2};$$

donc on pourra la rendre rationnelle par la méthode ci-dessus (7) : car en prenant un nombre h qui soit exactement divisible par n & v , & faisant $z = y^h$, h étant le nombre dont on vient de parler, la formule différentielle qu'on vient de trouver sera changée en une autre qui sera rationnelle, ou qui ne contiendra aucun exposant fractionnaire.

Si on vouloit intégrer une fraction radicale de la

forme $\frac{x^{m-1} dx}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}$, m & n étant positifs & entiers,

on feroit $a+bx^n = \frac{a}{1-bz}$, pour avoir $x^n = \frac{az}{1-bz}$.

$$\text{ou } x = \left(\frac{az}{1-bz} \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ \& } dx = \frac{a dz (1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n (az)^{\frac{n-1}{n}}};$$

$$\text{donc } S. \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}} = S. \frac{(az)^{\frac{n-1}{n}} a dz (1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n(1-bz) (az)^{\frac{n-1}{n}} a^n (1-bz)^{\frac{m}{n}}}$$

$$= S. \frac{a dz (az)^{\frac{n-1}{n}} (1-bz)^{-1}}{n a^n} = S. \frac{z^{\frac{n-1}{n}} dz}{1-bz}. \text{ On fera}$$

$$\text{ensuite } z = t^n, \text{ pour avoir } z^{\frac{n}{n}} = t^n, \text{ \& } \frac{m}{n} z^{\frac{m-n}{n}} dz =$$

$$m t^{m-1} dt; \text{ donc } S. \frac{z^{\frac{n-1}{n}} dz}{1-bz} = S. \frac{m t^{m-1} dt}{1-b t^n}; \text{ mais}$$

$\frac{m t^{m-1} dt}{1-b t^n}$, est une fraction rationnelle qu'on pourra intégrer facilement, ou par les séries, ou par la méthode des fractions rationnelles dont nous parlerons dans la suite.

DE L'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

II. Lorsque par la substitution, l'on ne pourra pas parvenir à donner à une formule différentielle une forme sous laquelle elle paroisse intégrable, algébriquement, ou par les logarithmes, on pourra avoir recours aux séries.

Soit la différentielle $\frac{b^3 dx}{b^3 - x^3}$, qu'on ne peut

intégrer algébriquement. Je fais $\frac{b^3 dx}{b^3 - x^3} = b^3 dx \cdot (b^3 - x^3)^{-1}$. J'élève $b^3 - x^3$ à la puissance -1 par la formule du binome de Newton, en supposant dans la formule $(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \&c.$, $a = b^3$ & $b = -x^3$, $m = -1$, & j'ai, en multipliant ensuite tous les termes par $b^3 dx$, la série $dx + \frac{x^3 dx}{b^3} + \frac{x^6 dx}{b^6} + \frac{x^9 dx}{b^9} \&c.$; donc l'intégrale de la formule proposée sera $= x + \frac{x^4}{4b^3} + \frac{x^7}{7b^6} + \frac{x^{10}}{10b^9} \&c$, série convergente, en supposant $b > x$. Si $x > b$, on réduira $(-x^3 + b^3)^{-1}$ en série en prenant x^3 pour le premier terme. Pour cela on changera la formule proposée en $\frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = -b^3 dx \cdot (x^3 - b^3)^{-1}$, & l'on aura x^3 pour le premier terme du binome qu'on veut élever à la puissance -1 ; l'on multipliera ensuite tous les termes par $-b^3 dx$, & l'on aura en intégrant, $S. \frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = \frac{b^3}{2x^2} + \frac{b^6}{5x^5} + \frac{b^9}{8x^8} + \frac{b^{12}}{11x^{11}} \&c.$

12. Au lieu de se servir du binome de Newton pour trouver les séries, l'on peut employer une méthode élégante dont se servent plusieurs analystes pour intégrer les formules différentielles, voici en quoi elle consiste. On divise la formule proposée

en deux facteurs, dont l'un contienne la différentielle & soit intégrable, & dont l'autre contienne la variable finie ; on intègre le premier facteur comme si l'autre étoit constant, & l'on différencie ensuite le résultat, ce qui donne la différentielle proposée avec une autre formule qui vient de la différentiation de l'autre facteur. Si l'on ajoute cette dernière formule à la proposée, & qu'on l'en retranche en même tems, l'on aura une formule qui en contient trois & dont les deux premières sont absolument intégrables. Si la troisième a de l'affinité avec la proposée, & qu'on puisse la traiter par la même méthode, on la changera en trois formules, dont les deux premières seront intégrables, & dont la troisième pourra être traitée de même, & ainsi successivement, l'on formera la série cherchée. Mais il sera plus élégant de prendre une formule générale, qui étant différenciée donne deux formules qui aient de l'affinité ; car par ce moyen, en déterminant les coefficients indéterminés, l'on a une série plus simple.

13. Soit la formule $\frac{dx}{a^3 + x^3}$ qu'on veut réduire en série. En regardant $\frac{1}{a^3 + x^3}$ comme un facteur constant, & intégrant l'on a $\frac{x}{a^3 + x^3}$. Je différencie maintenant cette formule que j'écris ainsi $x \times \frac{1}{a^3 + x^3}$, & j'ai $\left(\frac{dx}{a^3 + x^3} - \frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} \right)$. Si j'intègre, j'aurai $\frac{x}{a^3 + x^3}$; donc si je distribue

la formule proposée de la manière suivante

$$\frac{dx}{a^3 + x^3} - \frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} + \frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2},$$

* les deux premiers termes donneront une intégrale algébrique. La troisième formule est semblable à la formule proposée & n'en diffère que par les exposans, puisque celui de x dans le numérateur est augmenté de trois unités (car $dx = x^0 dx$), tandis que l'exposant du dénominateur ($a^3 + x^3$) est augmenté d'une unité ; c'est pourquoi j'intègre

en supposant $\frac{1}{(a^3 + x^3)^2}$ constant, ou ce qui revient au même, en supposant le facteur $\frac{1}{(a^3 + x^3)^2}$ constant, comme la première fois,

ce qui donne $\frac{3x^4}{4 \cdot (a^3 + x^3)^2}$. Différentiant cette intégrale (qui n'est pas la véritable), il vient $\frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} - \frac{2 \cdot 3^2 \cdot x^6 dx}{4(a^3 + x^3)^3}$; ainsi il faut dispo-

ser la 3^e formule de cette manière $\frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} -$

$$\frac{2 \cdot 3^2 x^6 dx}{4(a^3 + x^3)^3} + \frac{2 \cdot 3^2 x^6 dx}{4(a^3 + x^3)^3}.$$

Les deux premières formules prises ensemble ont une intégrale algébrique, & la troisième peut être traitée par la même méthode ; ainsi en répétant les opérations on trouvera la série cherchée.

* La seconde formule a le signe —, & la troisième le signe + ; parce que pour ajouter à b la quantité — a , & pour l'en retrancher en même tems, on peut écrire $b - a + a$.

14. Mais pour avoir la série d'une manière plus élégante, je me sers de la formule générale $\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}$,

dont je prends la différentielle de cette manière :

$$d\left(\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}\right) = \frac{(3p+1).x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} - \frac{3qx^{3p+1}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}};$$

$$\text{donc } S. \frac{x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} = \frac{1}{3p+1} \times \frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q} + \frac{3q}{3p+1} \times$$

$$S. \frac{x^{3p+1}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}}. (A).$$

Cela posé, je suppose $p=0$ & $q=1$ (pour avoir $x^{3p}dx = x^0dx=dx$), & j'ai $S. \frac{dx}{(a^3+x^3)} = \frac{x}{a^3+x^3} + 3 S. \frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2} (B);$

(car $q+1=2$). Je fais ensuite $p=1$ & $q=2$, & par la formule (A), j'ai $S. \frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} +$

$\frac{3 \cdot 2}{4} S. \frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3}$. Supposez ensuite $p=2$ & $q=3$, la

formule A donnera $S. \frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} +$

$\frac{3 \cdot 3}{7} S. \frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4}$. Si on fait $p=3$ & $q=4$, l'on aura

$S. \frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4} = \frac{1}{10} \times \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3 \cdot 4}{10} S. \frac{x^{12}dx}{(a^3+x^3)^5}$, &

ainsi de suite, l'on pourra continuer tant qu'on voudra.

Enfin dans la première substitution B écrivez au lieu de $S. \frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$, la valeur donnée par la seconde substi-

* La lettre d indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité renfermée dans la paranthèse.

tution, & ensuite à la place de $S. \frac{x^6 dx}{(a^3 + x^3)^3}$, la valeur que donne la troisième substitution, & ainsi de suite & l'on aura $S. \frac{dx}{a^3 + x^3} = \frac{x}{a^3 + x^3} + \frac{3}{4} \frac{x^4}{(a^3 + x^3)^2} + \frac{3^2 \cdot 2}{4 \cdot 7} \frac{x^7}{(a^3 + x^3)^3} + \frac{3^3 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 7 \cdot 10} \frac{x^{10}}{(a^3 + x^3)^4} + \frac{3^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} \frac{x^{13}}{(a^3 + x^3)^5} \&c.$

USAGE DES QUADRATURES ET DES RECTIFICATIONS DES COURBES DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

15. Il n'y a aucune formule différentielle qu'on ne puisse construire par la quadrature supposée d'une courbe. Soit une formule $B dx$, dans laquelle B soit une fonction de x , qu'on la réduise à une dimension linéaire, en la multipliant s'il le faut, ou en la divisant par des constantes, si B est une puissance 3^e , par exemple, on la divisera par a^2 . La formule étant ainsi préparée, supposons B linéaire $\& \equiv y$ & décrivons la courbe dont les co-ordonnées sont x , & $y \equiv B$. Si FM (Fig. 1^{re}.) est la courbe demandée, en faisant $AP \equiv x$, $PM \equiv y \equiv B$, l'on aura l'élément de cette courbe $\equiv y dx \equiv B dx$. Donc $S. B dx$ sera égale à l'aire $AFPM$. Donc on aura l'intégrale par le moyen de cette aire.

Si l'on demande l'intégrale $S. B dx$ pour le cas de $x \equiv a$, l'on prendra $AP \equiv a$, & l'aire $AFMP$ donnera l'intégrale cherchée.

Soit supposée $B \equiv \sqrt{(2ax - xx)}$, la différentielle $B dx$ sera $\equiv dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Comme B

est ici linéaire, on ne fera aucune multiplication ni aucune division, supposez $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, & décrivez la courbe de cette dernière équation, qui sera un demi-cercle AMD (Fig. 2), dont le diamètre $= 2a$; donc $S. B dx = S. y dx = S. dx. \sqrt{(2ax - xx)}$ est égal au segment AMP, AP étant x , & PM $= y$. Si la formule avoit été $a dx. \sqrt{(2ax - xx)}$, on l'auroit divisée par a ; mais on auroit ensuite multiplié l'intégrale par a ; de sorte que l'intégrale auroit été égale au produit de a par le segment APM.

Soit la formule $B dx = dx. \sqrt{(2ax + xx)}$; ayant décrit une hyperbole équilatère AM (Fig. 3), dont le demi-axe CA $= a$, l'espace AMP sera $= S. dx. \sqrt{(2ax + xx)}$.

16. Soit la formule $\frac{dx. x^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, qu'on multipliera par

a , pour avoir $\frac{a dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$; faites $\frac{a \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = B$

$= y$ & décrivez la courbe de cette équation; cette courbe est du troisième ordre. Supposons que AM (Fig. 4) soit cette courbe dans laquelle AP $= x$ & PM $= y$, l'on aura l'espace

APM $= S. \frac{a dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, & $S. \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$

$\frac{APM}{a}$. Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{a^2 + x^2}$, on la mul-

tiplieroit par a^3 ; & l'on auroit $\frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$. Supposez

$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ & décrivez la courbe BM.

(Fig. 5) de cette équation. Dans cette courbe $AP = x$ & $PM = y$, l'espace $ABPM$ sera $= S. \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$; donc $S. \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{ABMP}{a^3}$.

Soit la formule $\frac{a a dx}{b + x}$, l'on aura l'intégrale $S. \frac{a a dx}{b + x}$, par le moyen d'une hyperbole entre ses asymptotes. Voyez la section précédente (8).

Soit la formule $\frac{dx}{b b + x^2}$. Je multiplie cette formule par b^3 pour avoir $\frac{b^3 dx}{b^2 + x^2} = b^3 \cdot (b^2 + x^2)^{-1}$.

Or, section précédente (14), $\frac{dx}{2} \cdot a^3 (a^2 + x^2)^{-1}$, est l'élément d'un secteur de cercle, dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$. Donc si l'on fait AC (Fig. 2) $= b$, $Ab = x$, le secteur CAM sera $= \frac{1}{2} S. \frac{b^3 dx}{b^2 + x^2}$; mais $S. \frac{dx}{b^2 + x^2}$ est $= \frac{2 \cdot CAM}{b^3}$.

Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{g + x^2}$, en faisant $g = a^2$ (ce qui peut se faire en supposant qu'on ait multiplié g par 1 afin qu'il devienne a^2 , pour avoir $1 : a :: a : g = \frac{a a}{1} = a^2$), l'on auroit la formule $\frac{dx}{a a + x x}$, qu'on multiplieroit par $\frac{a^3}{2}$ afin d'avoir $\frac{a^3 dx}{2 \cdot (a^2 + x^2)}$, dont l'intégrale est un secteur de cercle, dont la tangente $= x$ & le rayon $= a$.

Si l'on avoit la formule $x^{\frac{3}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$, on la construiroit par le moyen d'une cissoïde. Voyez la section précédente (16).

La formule $x^x dx$ se construit par le moyen d'une courbe exponentielle dont l'ordonnée $y = x^x$. Voyez la section précédente (17).

La formule $\frac{y y d y}{\sqrt{(y y + a a)}}$ dépend de la quadrature de l'hyperbole; il en est de même de la formule $\frac{y y d y}{\sqrt{(y y - a a)}}$. Mais la formule $\frac{y y d y}{\sqrt{(a a - y y)}}$ dépend de la quadrature du cercle. Voyez la section précédente (21).

17. Il n'est pas nécessaire pour intégrer de construire la courbe dont l'abscisse est x , il sera même souvent utile de choisir un facteur différentiel qui soit intégrable algébriquement, & de faire son intégrable $= z$, z étant l'abscisse de la courbe qu'on doit décrire, en faisant l'autre facteur $= y$, y étant l'ordonnée de la même

courbe. Ainsi dans la formule $\frac{d x \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, dont on a parlé ci-dessus (16), ayant fait la multiplication par $\frac{a}{2}$ pour avoir $\frac{a d x \cdot \sqrt{x}}{2 \sqrt{(a-x)}} = \frac{d x \sqrt{a} \cdot \sqrt{a x}}{2 \sqrt{(a-x)}}$, je fais

$\frac{d x \sqrt{a}}{2 \sqrt{(a-x)}} = d z$; & en intégrant & ajoutant une constante arbitraire, j'ai $C - \sqrt{a} \cdot \sqrt{(a-x)} = z$, & en faisant $C = a$, je trouve $a - \sqrt{(a a - a x)} = z$, $a - z = \sqrt{(a a - a x)}$, ou $\frac{(a-z)^2}{a} = a - x$. Faites maintenant

$\sqrt{a x} = y$, ou $a x = y^2$, ou $x = \frac{y^2}{a}$, & l'équation de la courbe dont l'abscisse est z & l'ordonnée y

fera $\frac{(a-z)^2}{a} = a - \frac{y^2}{a} = \frac{aa - y^2}{a}$, ou $(a-z)^2 = aa - yy$, ou $aa - 2az + z^2 = aa - yy$, ou $2az - z^2 = y^2$. C'est pourquoi si avec le rayon $CA = a$ je décris un cercle $AMB D$ (Fig. 2), dans lequel on fasse $AP = z = a - \sqrt{(aa - ax)}$ & l'ordonnée $PM = y = \sqrt{(ax)}$, l'on aura $S. \frac{a dx \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{(a-x)}} = AMP$.

Donc $S. \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{2 \cdot AMP}{a}$. L'intégrale de la formule $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ dépendant de la quadrature du cercle,

la quadrature de la courbe AM (Fig. 4), par le moyen de laquelle on a construit la même formule dépendra aussi de la quadrature du cercle & l'espace infiniment long $ABHD$, sera égal au double d'un quart de cercle dont le rayon $= a$.

Soit la formule $\frac{dx \sqrt{(aa - xx)}}{x^3}$, je la multiplie par a^3 pour rendre linéaire le multiplicateur de dx , & je prends ensuite le facteur $\frac{aa dx}{x^2}$, dont l'intégrale algébrique est $\frac{a^2}{x}$, que je fais $= z$; donc $x = \frac{a^2}{z}$. Je fais en-

suite $\frac{a}{x} \sqrt{(aa - xx)} = y$. Pour décrire la courbe des co-ordonnées z & y , il faut déterminer la nature; pour cela je substitue dans la dernière équation la valeur de x donnée par l'avant-dernière, & j'ai $\frac{z}{a} \sqrt{(aa - \frac{a^4}{z^2})} =$

$\sqrt{(zz - aa)} = y$, équation à l'hyperbole équilatère. C'est pourquoi avec le demi-axe $CA = a$, je décris l'hyperbole équilatère AM (Fig. 3), je prends sur le premier axe l'abscisse $CP = z = \frac{aa}{x}$ & ayant mené

l'ordonnée PM , j'ai l'espace $APM = S. \frac{-a^3 dx \sqrt{(aa - xx)}}{x^3}$.

& $S. \frac{-dx \sqrt{(aa-xx)}}{x^3} = \frac{APM}{a^3}$. Ainsi pour chaque valeur de x l'on pourra connoître la valeur de z , & celle de $S. \frac{-dx \sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$.

18. Il sera quelquefois plus élégant de construire par les quadratures, non la formule proposée, mais une autre formule, qui étant ajoutée à la première, donnera une formule différentielle algébrique, de l'intégrale de laquelle retranchant l'intégrale de la formule ajoutée, il restera l'intégrale de la proposée.

Pour faire comprendre cet artifice, soit la formule proposée $y dx$; intégrez comme si y étoit constant & vous aurez yx ; prenez la différentielle de cette intégrale & vous trouverez $d(yx) = xdy + ydx$. Ainsi $x dy$ est la formule qu'on ajoutera à la proposée. Donc $yx = S. x dy + S. y dx$, & $yx - S. x dy = S. y dx$; Donc si par les quadratures vous trouvez $S. x dy$, & que vous retranchiez cette quantité de yx , vous aurez l'intégrale de la formule proposée.

Soit la formule $\frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$, que vous pourrez disposer ainsi $x^3 \frac{-x dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$; intégrant maintenant comme

si x^3 étoit constant, l'on a $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$; la différentielle de

celle-ci est $d\left(\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}\right)$ ou $\frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)^3}}$

donc $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} = S. \frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + 3 S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)^3}}$

ou $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} - 3 S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)^3}} = S. \frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$

M 4

Intégrons par les quadratures la formule $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$.

Pour cela je suppose $\frac{x dx}{\sqrt{(xx+aa)}} = dz$, afin d'avoir $\sqrt{(xx+aa)} = z$, & $x = \sqrt{(zz-aa)}$. Faites $x = y$ & décrivez la courbe des co-ordonnées x & y (dont l'équation est $zz-aa = xx = yy$, qui appartient à l'hyperbole équilatère). Avec le demi-axe $CA = a$, ayant décrit l'hyperbole équilatère AM (Fig. 3), prenez $CP = z = \sqrt{(xx+aa)}$, & ayant mené l'ordonnée PM , vous aurez $S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}} = APM$. Donc si on retranche le triple de cet espace de l'intégrale algébrique $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura l'intégrale de la formule proposée $\frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{5}{2}}}$.

Parlons maintenant de la construction des formules différentielles par le moyen des rectifications.

19. La méthode de construire les formules différentielles par la rectification des courbes paroît préférable à la construction par les quadratures; car si l'on décrit la courbe Am (Fig. 4), dont l'arc AM est supposé égal à l'intégrale d'une différentielle proposée, en enveloppant cet arc avec un fil, l'on aura facilement la longueur de cet arc, & par conséquent la valeur de l'intégrale cherchée.

Si l'on a la différentielle $p dx$, dans laquelle p est une fonction algébrique de x , que nous supposerons réduite à une dimension linéaire (ce qu'on peut toujours obtenir en multipliant ou en

divisant par une constante), il s'agit de réduire cette formule différentielle en une autre qui exprime l'élément d'un arc d'une courbe algébrique. Supposons que les co-ordonnées perpendiculaires de la courbe cherchée sont y & u , l'élément de l'arc de la courbe sera $= \sqrt{(dy^2 + du^2)}$; donc l'on doit avoir $p dx = \sqrt{(dy^2 + du^2)}$ & $p^2 dx^2 = dy^2 + du^2$. Cette équation fait voir que la formule $p^2 dx^2$ doit être partagée en deux parties dont les racines quarrées soient réelles & intégrables algébriquement & dont l'une soit $= dy$ & l'autre $= du$; leurs intégrales y & u seront les co-ordonnées de la courbe cherchée.

20. Soit la formule $p dx = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a} dx$; donc $p = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a}$; $p^2 dx^2 = \frac{4x^2 dx^2}{aa} + dx^2 = dy^2 + du^2$. Faisant $\frac{4x^2 dx^2}{aa} = dy^2$, & $dx^2 = du^2$, l'on a $\frac{2x dx}{a} = dy$, & $dx = du$. Donc en intégrant, $\frac{x^2}{a} = y$, & $x = u$. Par conséquent $\frac{uu}{a} = y$, ou $uu = ay$, équation à une parabole, dont le paramètre $= a$; donc $S. \frac{dx \cdot \sqrt{(4xx + aa)}}{a}$ s'obtient par la rectification d'un arc de parabole. Soit AM (Fig. 6) une parabole dont le paramètre $= a$, l'abscisse $AP = y$, l'ordonnée $PM = u$, l'équation de cette parabole sera $u^2 = ay$.

& parce qu'on a trouvé $u = x$ & $\frac{x^2}{a} = y$, si l'on prend l'abscisse $AP = \frac{x^2}{a}$ ou $\frac{uu}{a}$, l'on aura pour chaque valeur de x l'intégrale de la différentielle proposée. Si, par exemple, on fait $x = a$, & qu'on fasse $y = AP = \frac{x^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, l'intégrale correspondante à $x = a$, dépendra de la rectification de l'arc AM .

Soit la formule $\frac{dx \sqrt{(m^2 x^{2m-2} + a^{2m-2})}}{a^{m-1}}$ qu'on veut réduire à la rectification d'une courbe algébrique. J'éleve au quarré le multiplicateur de dx , pour avoir $\frac{m^2 x^{2m-2}}{a^{2m-2}} + 1$. Je divise cette quantité en deux parties $\frac{m^2 x^{2m-2}}{a^{2m-2}}$ & 1 , dont je prends les racines quarrées $\frac{m x^{m-1}}{a^{m-1}}$ & 1 . Multipliant les racines par dx , j'ai les formules $\frac{m x^{m-1} dx}{a^{m-1}}$ & dx , qui sont toutes les deux intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration l'on a $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ & x ; si je fais la première $= u$ & la seconde $= y$, il viendra $x = y$ & $\frac{x^m}{a^{m-1}} = u$, ou $\frac{y^m}{a^{m-1}} = u$, ou $y^m = a^{m-1} u$, équation qui appartient aux paraboles, ou aux hyperboles de tous les genres, selon que m est un nombre positif ou négatif, on suppose que m n'est pas $= -1$, autrement cette équation seroit à la ligne droite.

Ainsi la formule proposée s'intègre par un arc de ces courbes.

Soit la formule $pdx = dx \left(\frac{x}{a} + \frac{b}{a} + \frac{x^3}{a^2 c} \right)^{\frac{1}{2}}$;
 élevant au quarré le multiplicateur de dx &
 le partageant en deux quarrés $\frac{x}{a} + \frac{b}{a}$, $\frac{x^3}{a^2 c}$ * ;
 multipliant leurs racines (qui sont toutes les
 deux réelles) par dx , l'on a $dx \frac{\sqrt{(x+b)}}{\sqrt{a}}$,
 $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{a\sqrt{c}}$, qui étant intégrées & égalées, la première
 à u & la seconde à y , donneront $\frac{2}{3} \cdot \frac{(x+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} = u$;

$\frac{2}{5} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{a\sqrt{c}} = y$. Ainsi l'intégrale de la formule
 proposée sera égale à un arc de la courbe des co-
 ordonnées u & y .

21. Il est quelquefois à propos d'ajouter au
 quarré de la formule proposée & d'en retrancher
 en même tems une autre différentielle afin de ré-
 duire plus facilement la formule à la rectification
 d'une courbe algébrique.

Soit la formule $\frac{adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$; l'ayant élevée au

* Rien n'empêche de considérer ces quantités comme
 des quarrés, quoiqu'on n'en puisse pas extraire des ra-
 cines algébriques.

quarré, j'ajoute & je retranche $\frac{(ax - xx).dx^2}{ax - xx}$, pour avoir $\frac{(\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 + ax - x^2)}{ax - xx} dx^2$. Je partage maintenant cette formule, comme on le voit ici $\frac{(\frac{1}{2}a - x)^2 dx^2}{ax - xx}$, dx^2 , dont les racines sont $\frac{(\frac{1}{2}a - x) dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, & dx , toutes les deux réelles & intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration, il vient $\sqrt{(ax - xx)}$, & x . En faisant $\sqrt{(ax - xx)} = y$, & $x = u$, on trouvera $\sqrt{(au - uu)} = y$, ou $au - uu = y^2$, équation au cercle ; donc l'intégrale de la formule proposée, s'obtient par un arc de cercle. Lorsque $u - x$ est plus grand que a , la différentielle proposée est imaginaire, aussi bien que son intégrale.

22. Il arrive rarement que l'intégrale de la formule $p dx$ soit égale à un arc d'une courbe algébrique ; mais cette intégrale est très-souvent égale à un arc de courbe algébrique, en ajoutant ou retranchant une quantité algébrique. Ainsi il est permis d'ajouter à la formule $p dx$ une formule différentielle $q dx$ intégrable algébriquement. Pour déterminer la différentielle qu'on doit ajouter à la formule proposée pour qu'il en résulte une formule dont on puisse distribuer le quarré en deux parties, dont les racines soient réelles & algébriquement intégrables, nous établirons le théorème suivant.

23 THEOREME. Si ayant supposé $dx = s dp$ (s ne désigne point l'intégrale de dp), on décrit la courbe des co-ordonnées $x. (1 - p p)^{\frac{1}{2}}$, $s. (p - p^3) - x$, l'arc de cette courbe, que j'appellerai L , sera $= s. (1 - p p) - S. p dx$. Qu'on prenne les différentielles des co-ordon-

nées, l'on aura $ds \cdot (1 - pp)^{\frac{3}{2}} - 3s \cdot p dp \cdot (1 - pp)^{\frac{1}{2}}$,
 $ds \cdot (p - p^3) + s dp - 3pp dp - dx$. En substituant dx
 au lieu de sdp , ces différentielles se réduisent facile-
 ment aux suivantes. $(1 - pp)^{\frac{1}{2}} \cdot (ds(1 - pp) - 3pdx)$,
 $p(ds(1 - pp) - 3pdx)$. Si l'on prend la somme des quar-
 rés de ces différentielles, l'on trouve $(ds(1 - pp) - 3pdx)^2$,
 dont la racine $ds(1 - pp) - 3pdx$, sera l'élément
 de l'arc L ou sera $= dL$. Ajoutant & retranchant la
 quantité différentielle $s d(1 - pp)$, l'on a $ds \cdot (1 - pp) +$
 $s d(1 - pp) + 2s p dp - 3p dx = dL$. Je substitue
 $2dx$ au lieu de $2sdp$, pour avoir $ds(1 - pp) +$
 $s d(1 - pp) - p dx = dL$; donc en intégrant l'on a
 $s(1 - pp) - Sp dx = L$, ce qu'il falloit démontrer;
 donc $Sp dx = L - s(1 - pp)$; ainsi l'intégrale de la
 différentielle $p dx$ est égale à l'arc L , moins la quan-
 tité $s(1 - pp)$. On doit remarquer que l'on peut pren-
 dre positivement ou négativement les co-ordonnées;
 car il en résultera toujours le même quarré, puisque
 le quarré d'une quantité négative est toujours positif.
 Ainsi la somme des quarrés des différentielles des co-
 ordonnées sera toujours le même & $= (dL)^2$. De
 même lorsqu'on prend la racine dL , il est incertain si
 cette racine doit avoir le signe $+$ ou le signe $-$;
 c'est pourquoi il sera à propos de donner à l'arc L le
 double signe \pm & de déterminer ensuite lequel des deux
 doit avoir lieu. On doit se souvenir de ne pas omettre
 d'ajouter une constante.

Soit la formule $\frac{a dx}{x}$ qu'on veut réduire à la rectifi-
 cation d'un arc d'une courbe algébrique. En compa-
 rant nous avons $p = \frac{a}{x}$; donc $dp = \frac{-a dx}{xx}$, & $s = \frac{dx}{dp}$
 $= -\frac{x^2}{a}$, $1 - pp = 1 - \frac{aa}{xx} = \frac{xx - aa}{xx}$, $s \cdot (1 - pp)$
 $= -\frac{1}{a} (xx - aa)$. Les co-ordonnées de la courbe

cherchée sont donc $-\left(\frac{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}{ax}\right)$, $\frac{-2xx+aa}{x}$, ou (en prenant les co-ordonnées avec des signes contraires) $\frac{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}{ax}$, $\frac{2xx-aa}{x}$; donc par le théorème l'on aura $-\frac{1}{a}(xx-aa) \mp L = S. \frac{a dx}{x}$. Pour savoir quel signe l'on doit prendre, prenez la somme des quarrés des différentielles des co-ordonnées & vous aurez $\left(\frac{4x^4 + 4a^2x^2 + a^4}{aaxx}\right). dx^2 = (dL)^2$; & en prenant les racines, $dx \left(\frac{2x^2 + a^2}{ax}\right) = dL$. Différenciez $-\frac{1}{a} \cdot (xx-aa)$ pour avoir $-\frac{2xdx}{a}$, quantité qui étant ajoutée avec $dx \left(\frac{2x^2 + a^2}{ax}\right)$, donne la formule proposée $\frac{a dx}{x}$; donc dL doit avoir le signe $+$ aussi bien que L , & la véritable formule sera $-\frac{1}{a}(xx-aa) + L = S. \frac{a dx}{x}$.

Le théorème précédent est inutile toutes les fois que $pp > 1$; car alors la co-ordonnée $s.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$ est imaginaire. Pour remédier à cet inconvénient, voici la méthode qu'on peut suivre : ayant fait $dx = s dp$; décrivez la courbe des co-ordonnées $s.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = y$, $s.(p^3-p) = x = u$; cela posé, l'on aura le théorème suivant.

$\int \sqrt{(du^2 - dy^2)}$ est $= s.(pp-1) + S. p dx$. Ce théorème se démontre comme le précédent. Car prenant les différentielles des co-ordonnées, l'on aura

$ds (pp-1)^{\frac{3}{2}} + 3s.pdp.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = dy$, $ds.(p^2-p) + 3sp^2dp - sdp + dx = du$. Substituez dans ces différentielles, dx au lieu de $s.dp$ & vous aurez $ds(pp-1)^{\frac{3}{2}} + 3pdx.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = dy$, ou $(pp-1)^{\frac{1}{2}}.(ds.(p^2-1) + 3pdx) = dy$, & $p.(ds(pp-1) + 3pdx) = du$. Élevez au carré la valeur de dy , & celle de du , & vous aurez $(pp-1).(ds(pp-1) + 3pdx)^2 = dy^2$, $p^2 \times (ds.(pp-1) + 3pdx)^2 = du^2$; donc $du^2 - dy^2 = (ds.(pp-1) + 3pdx)^2$, & $ds.(pp-1) + 3pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$. J'ajoute au premier membre de cette équation & j'en retranche en même tems $s.d(pp-1)$, & j'ai $ds.(pp-1) + s.d(pp-1) - 2spdp + 3pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$ *, ou (en substituant dx au lieu de sdp) $ds.(pp-1) + s.d(pp-1) + pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$; donc en intégrant, on a (A) $s(pp-1) + Spdx = S.\sqrt{du^2 - dy^2}$. Ce théorème est de Ricati, & le précédent a été trouvé par Jean Bernoulli.

Servez-vous du théorème de Bernoulli pour intégrer la formule $\sqrt{du^2 - dy^2}$, par la rectification d'une courbe algébrique. Pour cela supposez $dy = qdu$ & la formule deviendra $du\sqrt{1 - qq}$, dans laquelle $qq < 1$, parce que du^2 est supposé plus grand que dy^2 . En effet, il est aisé de voir que la valeur qu'on a trouvée ci-dessus pour du^2 , est plus grande que celle de dy^2 **.

* $s.d(pp-1) = s.2pdp = 2s.pdp$.

** Car en multipliant par pp , l'on a un plus grand produit qu'en multipliant par $pp-1$.

Supposons donc que la quantité qui, dans le théorème de Bernoulli, est représentée par p . Soit ici représentée par $\sqrt{1-qq}$, & que la quantité qui, dans le théorème de Bernoulli est x , soit ici u , celle qui est s dans le théorème de Bernoulli sera ici appelée z ; c'est pour-
 quoi ayant introduit ces valeurs, l'on a $du = \frac{-z q dq}{\sqrt{1-qq}}$ *,
 & les co-ordonnées de la courbe seront $zq^3, zq^2\sqrt{1-qq}$
 — u . Enfin vous aurez $L = z \cdot q^2 - S. du \sqrt{1-qq}$
 ou $zq^2 - L = S. du \sqrt{1-q^2} = S. \sqrt{du^2 - dy^2}$.
 Si l'on substitue cette valeur dans la formule A, il
 vient $s. (pp - 1) + S. p dx = zq^2 - L$, ou $S. p dx =$
 $zq^2 - s. (pp - 1) - L$, qui ne peut être troublée par
 aucune quantité imaginaire lorsque $pp > 1$. Ainsi l'on
 voit par les deux théorèmes précédens que toute formule
 différentielle algébrique; c'est-à-dire, qui ne renferme
 aucune quantité transcendante, peut être construite par la
 rectification d'une courbe algébrique.

24. PROBLÈME. Construire la formule $\frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$.
 L'on ne peut employer le théorème de Bernoulli, parce
 que en faisant $p = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$, l'on auroit $pp = \frac{x}{x-a}$
 & $1 - pp = \frac{-a}{x-a}$, quantité négative (au-
 trement $x-a$ seroit négative & $\sqrt{(x-a)}$, imagi-
 naire aussi bien que la formule proposée); Ainsi il faut
 avoir recours au théorème de Vincent Ricati. L'on
 aura donc $pp - 1 = \frac{a}{x-a}$, $2p dp = \frac{-a dx}{(x-a)^2}$, $dp =$
 $\frac{-a dx}{2p \cdot (x-a)^2} = \frac{a dx}{x^{\frac{1}{2}} (x-a)^{\frac{3}{2}}}$, à cause de $pp = \frac{a}{x-a}$

* Car dans le théorème de Bernoulli $dx = s. dp$; donc
 ici $du = z d(1-qq)^{\frac{1}{2}} = \frac{-z q dq}{\sqrt{(1-qq)}}$.

$$1 = \frac{x}{x-a}; \text{ ainsi } p = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x-a)}}, \text{ \& } s = \frac{dx}{dp} = \frac{2x^{\frac{1}{2}} \cdot (x-a)^{\frac{1}{2}}}{a}; \text{ donc } s \cdot (pp-1) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-a)}.$$

De plus l'on trouve que les co-ordonnées de la courbe qu'on doit employer sont $2 \cdot \sqrt{ax} = y$, $-x = u$ ou $x = u$, en changeant le signe de x . Donc par le théorème, nous aurons $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-a)} + S. \frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = S. \sqrt{(du^2 - dy^2)} \text{ (B).}$

Construisons maintenant la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ par la rectification d'une courbe algébrique. Puisque $u = x$, & que y est $= 2\sqrt{ax}$, l'on aura $du = dx$, $dy = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. Ainsi la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ devient $dx \sqrt{(1 - \frac{a}{x})} = \frac{dx \sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}$; donc $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, $1 - qq = \frac{x-a}{x}$,

$$d\sqrt{(1 - qq)} = \frac{a dx}{2x^{\frac{3}{2}} (x-a)^{\frac{1}{2}}}, \quad z = \frac{du}{d\sqrt{(1 - qq)}} =$$

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}} (x-a)^{\frac{1}{2}}}{a}, \text{ \& les co-ordonnées de la courbe seront}$$

$2\sqrt{a} \cdot \sqrt{(x-a)}$, & $x - 2a$. Supposons cette courbe décrite & appelons L l'arc de cette courbe qu'on doit prendre de manière que L croisse, x croissant. Ayant fait les substitutions convenables dans la formule $zq^2 - L = S. \sqrt{(du^2 - dy^2)}$, il vient $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-a)} - L = S. \sqrt{(du^2 - dy^2)}$. C'est pourquoi, en substituant cette valeur de $S. \sqrt{(du^2 - dy^2)}$ dans la formule B, on trouvera $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-a)} + S. \frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-a)} - L$, ou $S. \frac{-dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = -L$, ou $S. \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = L$; ce qui fait voir que la formule

proposée s'intègre par la rectification d'une courbe algébrique sans l'addition d'aucune quantité algébrique. Pour déterminer la courbe, je fais la co-ordonnée $2\sqrt{a}\sqrt{x-a}=m$, & la co-ordonnée $x-2a=n$; donc $4a(x-a)=mm$, $x-a=n+a$; donc $4a(n+a)=mm$, équation à la parabole d'Apollonius. Avec le paramètre $4a$, je décris la parabole AM (Fig. 7), dont l'abscisse AP $=n+a$; donc ayant pris Ai $=a$, l'on aura P $=n$, l'ordonnée PM étant $=m$. Je prolonge PA en D jusqu'à ce que AD $=a$, pour avoir DP $=n+2a=x$; c'est pourquoi les DP étant x , AM sera $= S. \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$.

RAMENER DANS CERTAINS CAS L'INTÉGRATION D'UNE FORMULE DIFFÉRENTIELLE A CELLE D'UNE AUTRE FORMULE DIFFÉRENTIELLE PLUS SIMPLE.

25. Soit proposé de réduire l'intégrale de $x^m dx \times (a+bx^n)^p$, à celle de $x^q dx (a+bx^n)^r$, en supposant $m > q$. Je prends la formule $x^{m+1}(a+bx^n)^p$, dont la différentielle est $(m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p + bnp x^{m+1} x^{n-1} \times dx (a+bx^n)^{p-1}$; donc $(m+1). S. dx.x^m(a+bx^n)^p = x^{m+1} \times (a+bx^n)^p - bnp S. x^{m+n} dx (a+bx^n)^{p-1}$, ou $S. dx.x^m(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$

$$- \frac{bnp}{m+1} S. x^{m+n} \times dx (a+bx^n)^{p-1}.$$

$$\text{De même } S. x^{m+n} dx (a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+n+1} - \frac{bn(p-1)}{m+n+1} \times$$

$$S. x^{m+n} dx (a+bx^n)^{p-2}; \text{ donc l'on aura}$$

$$\begin{aligned}
 S. x^m dx (a + bx^n)^p &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} \\
 &+ \frac{b n p x^{m+n+1} (a + bx^n)^{p-1}}{(m+1) \cdot (m+n+1)} \\
 &+ \frac{b^2 n^2 p \cdot (p-1) \cdot S. x^{m+2n} dx (a + bx^n)^{p-2}}{(m+1) \cdot (m+n+1)} \\
 &\& \text{en continuant de même, il sera aisé de voir qu'en} \\
 &\text{général l'on aura } S. x^m dx (a + bx^n)^p = \\
 &\frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} + \frac{b n p x^{m+n+1} (a + bx^n)^{p-1}}{(m+1) \cdot (m+n+1)} \\
 &+ \frac{b^2 n^2 p \cdot (p-1) x^{m+2n+1} (a + bx^n)^{p-2}}{(m+1) \cdot (m+n+1) \cdot (m+2n+1)} \dots \&c. \\
 &\pm \frac{b^{t-1} n^{t-1} p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \dots (p-t+1)}{(1+m) \cdot (1+m+n) \cdot (1+m+2n) \dots [1+m+n(t-1)]} \times \\
 &\frac{x^{1+m+n(t-1)} (a + bx^n)^{p-t+1}}{S. x^{m+tn} dx (a + bx^n)^{p-t}} \times \\
 &\frac{b^t n^t p \cdot (p-1) \dots (p-t+1)}{(1+m) \cdot (1+m+n) \dots [1+m+n(t-1)]}.
 \end{aligned}$$

Le signe supérieur a lieu lorsque t est un nombre entier positif impair ; & le signe inférieur, lorsque t est un nombre entier positif, mais pair. Maintenant si $p - t = r$, ou si $p - r = t$, nombre entier, l'intégrale de $x^m dx (a + bx^n)^p$, se réduira à celle de $x^{m+tn} dx (a + bx^n)^r$; & si $t = \frac{q-m}{n}$ est un nombre entier positif, on réduira l'intégrale de la formule proposée à celle de la formule $x^q dx (a + bx^n)^r$: car alors on aura $q = m + tn$.

26. Mais l'intégrale de $x^{m+n} dx (a+bx^n)^p$ se réduit à l'intégrale de $x^h dx (a+bx^n)^p$, lorsque $\frac{m+1n-h}{n}$, ou lorsque $\frac{m-h}{n}$, est un nombre entier

positif; c'est-à-dire, lorsque la différence des exposans des variables hors du binome étant divisée par l'exposant de la variable dans le binome, donne un nombre positif, &c pour le faire voir prenez la quantité $x^{q+1} (a+bx^n)^{p+1}$, dont la différentielle est $(q+1) \cdot x^q dx (a+bx^n)^{p+1} + dx \cdot bn \cdot (p+1) \times x^{q+1+n-1} (a+bx^n)^p$, ou $(qa+a)x^q (a+bx^n)^p dx + (qbx^n+bx^n)x^q (a+bx^n)^p dx + bn \cdot (p+1) \times x^{q+n} dx (a+bx^n)^p = (aq+a) \cdot x^q dx (a+bx^n)^p + (bnp+bn+qb+b) \cdot x^{q+n} dx (a+bx^n)^p$. Donc

$$S. x^{q+n} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{q+1} (a+bx^n)^{p+1}}{b(np+n+q+1)} -$$

$$\frac{a(q+1) S. x^q dx (a+bx^n)^p}{b \cdot (np+n+q+1)}.$$

Supposons maintenant qu'on veut réduire l'intégrale de $x^m dx (a+bx^n)^p$, à celle de $x^n dx (a+bx^n)^p$. Je fais $q+n=m$, ou $q=m-n$, pour avoir

$$S. x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n} (a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$

$$\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} S. x^{m-n} dx (a+bx^n)^p. \text{ Par la même}$$

$$\text{raison } S. x^{m-n} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n} (a+bx^n)^{p+1}}{b(1+m+np-n)} -$$

$$- \frac{a(m-n+1) \cdot S. x^{m-n} dx (a+bx^n)^p}{b(np+m+1-n)}. \text{ Et en général on}$$

$$\text{aura } S. x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n} (a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$

$$\frac{a(1+m-n)x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2(np+m+1)(np+m+1-n)} +$$

$$\frac{a^2(1+m-n)(1+m-2n)x^{1+m-3n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3(np+m+1)(np+m+1-n)(np+m+1-2n)} \&c.$$

$$\mp \frac{a^{t-1}(1+m-n)(1+m-2n)\dots(1+m-n.t-1)x^{1+m-tn}(a+bx^n)^{p+1}}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\dots(np+m+1-n.(t-1))}$$

$$\pm \frac{a^t(1+m-n)(1+m-2n)\dots(1+m-tn).S x^{m-tn} dx (a+bx^n)^p}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\dots(np+m+1-n.(t-1))}$$

Le signe supérieur a lieu lorsque t est pair, & l'inférieur lorsque t est impair. Ainsi il est aisé de voir que

si $m - tn = u$, ou si $m - u = tn$, ou si $t = \frac{m-u}{n}$, ou

si la différence des exposans de x hors du binome divisée par l'exposant n de x dans le binome, donne un nombre entier positif, on pourra réduire l'intégrale de $x^m dx (a+bx^n)^p$ à celle de $x^u dx (a+bx^n)^p$, par le moyen de la formule précédente, ou en opérant comme on vient de le faire.

27. La formule $S. dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$ dépend de la quadrature du cercle; car en supposant le rayon CA (Fig. 2) $= 1$, $CP = x$, Pp sera $= dx$, & $y dx = dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'élément de l'aire $CBMP$; ainsi $S. dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} = CBMP$. Si l'on vouloit ramener $S. x^4 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$ à $S. dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$, l'on auroit $a=1$, $b=-1$, $m=4$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, & l'on trouveroit par la méthode ci-dessus (25), $S. x^4 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{x^5 (1-xx)^{\frac{1}{2}}}{5} + \frac{5x^7 (1-xx)^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 7} +$$

N₃

$\frac{5 \cdot 3 \cdot S. x^3 (1 - xx)^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 7}$. Par la méthode précédente

(26), l'on a $S. x^3 dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x^7 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10} -$

$\frac{7x^5 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 5 x^3}{10 \cdot 8 \cdot 6} (1 - xx)^{\frac{3}{2}} -$

$\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \cdot x \cdot (1 - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \cdot S. dx (1 - xx)^{\frac{5}{2}} ;$

donc $S. x^4 dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^5 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{5} + \frac{x^7 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10} -$

$\frac{3}{10 \cdot 8} \cdot x^5 (1 - xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 8 \cdot 6} \cdot x^3 (1 - xx)^{\frac{3}{2}} -$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \cdot x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \text{ CBMP,}$

en substituant la valeur de $S. dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, & faisant attention au multiplicateur $\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ de $S. x^3 dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES.

28. On peut intégrer toutes les différentielles qui ne sont pas absurdes par les propriétés des courbes.

Soit la formule $\frac{-dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$, je fais cette formule $= dx$; mais par la section précédente (N°. 13), dans la trajectrice l'élément de l'abscisse est $= \frac{-dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$;

donc l'intégrale $-S. \frac{dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$ est égale à une abscisse correspondante à l'ordonnée y d'une trajectrice dont

la tangente $= a$. Soit maintenant la formule $\int \frac{a dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$,
 l'on aura (par le N°. 21, section précédente) $S. \int \frac{a dy}{\sqrt{(aa+yy)}} = x$,
 x étant l'abscisse de la courbe des sinus hyperboliques, & y l'ordonnée de la même courbe. L'on
 aura de même $S. \int \frac{a dy}{\sqrt{(yy-aa)}} = x$, x étant
 l'abscisse de la ligne des co-sinus hyperboliques. Voyez
 l'endroit cité.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DU CERCLE.

29. Avant d'entrer en matière nous remarquerons que tous les cercles étant des figures semblables, leurs lignes homologues droites ou courbes comme les arcs semblables, les sinus, les co-sinus, les tangentes, les co-tangentes, les sécantes, les co-sécantes appartenans à des arcs semblables, sont dans le rapport des rayons de cercles; de sorte que si on nomme R le rayon des tables, r le rayon d'un cercle quelconque; p une des lignes dont on vient de parler, prise dans le cercle du rayon R , x la ligne homologue dans le cercle du rayon r , l'on aura $R : r ::$

$$p : x = \frac{rp}{R}, \text{ \& } p = \frac{Rx}{r}.$$

Donc si l'on connoît x dans le cercle dont le rayon est r , & qu'on connoisse p par les tables, l'on connoitra la valeur de x dans le cercle dont le rayon est R , & réciproquement si on connoît p par les tables pour le cercle du rayon R , l'on connoitra facilement la ligne homologue pour le cercle dont le rayon est r .

30. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a + cx^2}$

$$= \frac{\frac{1}{c} dx}{\frac{a}{c} + x^2} = \frac{\frac{a dx}{ac}}{\frac{a}{c} + x^2} \text{ est } = \frac{s}{a};$$

s étant un arc de cercle dont le rayon est $\sqrt{\frac{a}{c}}$ & la tangente x ; car on a vu ci-dessus, section précédente (31), que $\frac{a^2 dx}{aa + xx}$ étoit l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$; donc si le rayon est $= \sqrt{\frac{a}{c}}$, la

différentielle de l'arc sera $= \frac{\frac{a}{c} dx}{\frac{a}{c} + xx}$; donc, &c.

S. $\frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{s}{a}$, s étant un arc de cercle AM (Fig. 2); donc le rayon $= a$, & l'abscisse $= AP$ (ou son sinus versé) $= x$; car $\frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ est l'élément d'un tel arc (section précédente 31). S. $\frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = s$, s étant un arc de cercle BM, dont le rayon $= a$, & le sinus PC $= Mg = x$; car les triangles semblables CPM, Mmn donnent PM : CM :: nm : Mm, ou $\sqrt{(aa - xx)} : a :: dx : \frac{a dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$; donc, &c.

S. $\frac{df}{f\sqrt{(ff-aa)}} = \frac{f}{a^2}$, f étant un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la sécante $= f$.

S. $\frac{-a dx}{(aa+xx)} = \frac{f}{a}$, f étant un arc de cercle dont la co-tangente $= x$; car on a vu dans la section précédente (21), que $\frac{a^2 df}{f\sqrt{(ff-aa)}}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la sécante $= f$, & que $\frac{a^2 dx}{aa+xx}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la co-tangente $= x$; donc, &c. On peut aussi remarquer que, selon ce qu'on a dit au même lieu, S. $\frac{-a^2 dy}{y\sqrt{(yy-aa)}}$ est $= f$, f étant un arc de cercle dont la co-sécante $= y$.

DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

31. Si l'on a une équation d'une courbe réduite à cette forme $y = ax^m + bx^n + cx^p + \&c.$ y ne peut être imaginaire, à moins qu'il n'y ait dans l'équation quelque exposant pair, & que la quantité sous cet exposant soit négative. Toutes les quantités imaginaires de quelle espèce qu'elles soient peuvent se réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainsi qu'on va le démontrer après avoir établi les lemmes suivans.

32. LEMME I. $(\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p)^m = \cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp$, p étant un angle, ou

arc dont le rayon $\equiv 1$, & m un nombre quelconque ; cette proposition est une suite de ce qu'on a dit dans la première partie de cet ouvrage (voyez la Géométrie). Mais pour démontrer rigoureusement que cela a lieu, en supposant même que m est un nombre sourd tel que $\sqrt{3}$, par exemple, je prends les logarithmes hyperboliques (car c'est de ceux-là dont il s'agira toujours, à moins qu'on avertisse du contraire) de part & d'autre ; ce qui donne $mL. (\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p) \equiv L. (\cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp)$. Différenciant * en regardant p comme variable, on aura

$$(A') \quad \frac{mdp \cdot \sin. p + mdp \sqrt{-1} \cdot \cos. p}{\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p}$$

$$\equiv \frac{-m dp \sin. mp + m dp \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos. mp}{\cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp}$$

Multipliant les numérateurs par $-\sqrt{-1}$, il

vient $\frac{m dp \cdot (\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p)}{\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p} \equiv$

$\frac{m dp \cdot (\cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp)}{\cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp}$, ou

$mdp \equiv m dp$, équation identique ; ainsi l'équation (A), dont celle-ci est tirée est vraie ; donc, &c.

* Voyez vers le commencement de la première section comment il faut s'y prendre pour différencier les quantités logarithmiques, & celles qui renferment des sinus & des co-sinus.

33. LEMME II. u étant un arc dont le rayon $= 1$,
 l'on aura $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} L.(\sin. u \sqrt{-1} + \cos. u)$. En
 multipliant par $\sqrt{-1}$. Et différenciant, il vient
 $du \cdot \sqrt{-1} = \frac{\cos. u \cdot du \sqrt{-1} - \sin. u \cdot du}{\sin. u \sqrt{-1} + \cos. u}$, &
 (en divisant par du , ôtant la fraction & faisant
 attention que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$)
 $-\sin. u + \cos. u \sqrt{-1} = \cos. u \sqrt{-1} -$
 $\sin. u$, équation identique; donc l'équation du
 lemme dont celle ci est tirée, est vraie.

34. THEOREME. Toutes les quantités ima-
 ginaires de quelque espece qu'elles soient, peuvent
 toujours se réduire à la forme $M + N \sqrt{-1}$,
 M & N étant des quantités réelles (M peut
 aussi être $= 0$). Nous distinguerons toutes les
 formes des quantités imaginaires qu'il paroît pos-
 sible de concevoir, 1°. Soit $a + b \sqrt{-1}$ une
 • quantité imaginaire, a & b étant des quantités
 réelles. La quantité $(a + b \sqrt{-1})^m$, m étant
 une quantité réelle, pourra toujours se réduire
 à la forme dont on vient de parler. Faisons
 $a^2 + b^2 = c^2$, & cherchons l'angle p , tel que
 son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & son co-sinus $= \frac{a}{c}$, cet
 angle p sera toujours réel, puisque a & b
 sont supposés des quantités réelles. Si l'on
 fait la demi-circonférence $= n$, les arcs
 dont les sinus $\frac{b}{c}$ & les co-sinus $\frac{a}{c}$ sont les mê-
 mes, seront p , $2n + p$, $4n + p$, $6n + p$, &c.
 auxquels on peut ajouter ceux-ci, $-2n + p$,
 $-4n + p$, $-6n + p$, &c. Cela posé, on

aura $a + b\sqrt{-1} = c \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \sqrt{-1} \right)$
 $= c (\cos. p + \sin. p \sqrt{-1})$, $(a + b\sqrt{-1})^m =$
 $c^m (\cos. p + \sin. p \sqrt{-1})^m = c^m (\cos. mp +$
 $\sqrt{-1} \sin. mp)$, par le lemme premier; donc
 en faisant $M = c^m \cos. mp$, & $N = c^m \sin. mp$,
 l'on aura $(a + b\sqrt{-1})^m = M + N\sqrt{-1}$.

2°. Si a est une quantité positive élevée à un
 exposant imaginaire $m + n\sqrt{-1}$, l'on pourra
 toujours réduire $a^{m+n\sqrt{-1}}$ à la formule du
 théorème. Soit $a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$,
 l'on aura (en prenant les logarithmes) $(m+n\sqrt{-1}) \times$
 $L.a = L.(x + y\sqrt{-1})$. Différenciant en re-

$$\text{gardant } a, x \text{ \& } y \text{ comme variables, on aura } \frac{m da}{a}$$

$$+ \frac{n da}{a} \sqrt{-1} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}} = \frac{x dx + y dy}{xx + yy}$$

$$+ \frac{(x dy - y dx) \sqrt{-1}}{xx + yy}, \text{ en multipliant le nu-}$$

mérateur & le dénominateur par $x - y\sqrt{-1}$.
 Égalant séparément les quantités réelles aux quan-
 tités réelles & les imaginaires aux imaginaires (ce
 qu'on doit toujours faire, autrement l'on suppo-
 seroit qu'une quantité réelle peut être égale à une

quantité imaginaire), l'on a $\frac{m da}{a} = \frac{x dx + y dy}{xx + yy}$

$$\& \frac{n da \sqrt{-1}}{a} = \frac{(x dy - y dx) \sqrt{-1}}{xx + yy}; \text{ donc}$$

en divisant par $\sqrt{-1}$, cette dernière équation devient $\frac{n da}{a} = \frac{x dy - y dx}{xx + yy}$; donc en inté-

grant l'on aura ces deux autres équations $m L.a$

$\equiv L. \sqrt{(xx + yy)}$, & $n L. a \equiv f$, f étant un arc dont la tangente est $\equiv \frac{y}{x}$; car en faisant le rayon $\equiv a$, la tangente $\equiv z$, l'on auroit la différentielle de l'arc $\equiv \frac{a a dz}{a a + z z}$. Donc en fai-

sant $a \equiv 1$ & $z \equiv \frac{y}{x}$, l'on aura la différentielle de l'arc $\equiv \frac{x dy - y dx}{xx + yy}$; donc $\frac{y}{x} \equiv$

tang. $n L. a$. C'est pourquoi en prenant dans un cercle AB (Fig. 2) dont le rayon est supposé $\equiv 1$, l'arc $n L. a \equiv AM$, l'on aura $CP \equiv x \equiv \cos. n L. a$, & $PM \equiv y \equiv \sin. n L. a$; donc $a^{m+n} \sqrt{-1} \equiv x + y \sqrt{-1} \equiv \cos. n L. a + \sin. n L. a \sqrt{-1} \equiv M + N \sqrt{-1}$, en faisant $\cos. n L. a \equiv M$, & $\sin. n L. a \equiv N$. Il est visible que a étant une quantité positive, M & N sont des quantités réelles. Si on prend l'arc $n L. a$ dans un cercle dont le rayon $\equiv \sqrt{(y^2 + x^2)} \equiv a^m$, l'on aura $(a + b \sqrt{-1})^m \equiv a^m \times \cos. n L. a + a^m \sin. n L. a \sqrt{-1}$; car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (29), dans ce cas l'on a $x \equiv a^m \cos. n L. a$, & il est visible que cette quantité se réduit à la même forme $M + N \sqrt{-1}$.

3°. Si l'on a la quantité $(a + b \sqrt{-1})$ élevée à un exposant imaginaire $m + n \sqrt{-1}$; ce cas sera encore compris dans la formule $M + N \sqrt{-1}$: car soit $(a + b \sqrt{-1})^{m+n \sqrt{-1}} \equiv x + y \sqrt{-1}$, on aura, en prenant les logarithmes, $(m + n \sqrt{-1}). L. (a + b \sqrt{-1}) \equiv L. (x + y \sqrt{-1})$. Et en prenant les différen-

tielles, multipliant & divisant celle de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$, & celle de $a + b\sqrt{-1}$ par $a - b\sqrt{-1}$, il viendra $\frac{x dx + y dy}{xx + yy} + \frac{(x dy - y dx)\sqrt{-1}}{xx + yy} = \frac{m \cdot (ada + b db)}{aa + bb} + \frac{n(adb + b da)\sqrt{-1}}{aa + bb} + \frac{m(adb - b da)\sqrt{-1}}{aa + bb} - \frac{n(adb - b da)}{aa + bb}$. En égalant les quantités réelles aux quantités réelles, les imaginaires aux imaginaires, il vient $\frac{m(ada + b db)}{aa + bb} = \frac{n(adb - b da)}{aa + bb}$ $= \frac{x dx + y dy}{xx + yy}$, & $\frac{m(adb - b da)}{aa + bb} + \frac{n(adb + b da)}{aa + bb} = \frac{x dy - y dx}{xx + yy}$. Pour en prendre les intégrales, je fais $\sqrt{aa + bb} = c$, l'arc dont la tangente est $\frac{b}{a}$ étant supposé $= p$; ainsi $\sin. p = \frac{b}{c}$, & $\cos. p = \frac{a}{c}$; donc les intégrales seront $m L. c - np = L. \sqrt{xx + yy}$, $mp + n L. c = A. \text{Tang. } \frac{y}{x}$ (A désigne l'arc de la tang. $\frac{y}{x}$). Mais $m L. c - np = m L. c - np L. e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; donc $L. \sqrt{xx + yy} = m L. c - np L. e$, ou $\sqrt{xx + yy} = c^m e^{-np}$. Ainsi prenant $\sqrt{aa + bb} = c$, & l'angle p tel que $\cos. p = \frac{a}{c}$, & $\sin. p = \frac{b}{c}$, & faisant le rayon du

cercle $= \sqrt{(xx + yy)}$, on aura $x = c^m e^{-np} \cos. (mp + n L. c)$, & $y = c^m e^{-np} \sin. (mp + n L. c)$. Donc $x + y \sqrt{-1} = (a + b \sqrt{-1})^{m+np} \sqrt{-1}$ est réductible à la forme $M + N \sqrt{-1}$. De plus si les exposans étoient élevés eux-mêmes à des puissances dont les exposans fussent imaginaires, ils seroient compris sous la même forme. Car si q, r, t , sont des imaginaires de la forme $M + N \sqrt{-1}$, la

quantité a^{q^r} sera comprise sous la même forme, puisque r est réductible à cette forme, & par conséquent aussi q^r .

4°. Il est évident que toutes les fractions formées par addition, soustraction, multiplication ou division de tant de formules imaginaires que ce soit de cette forme $M + N \sqrt{-1}$, seront comprises dans la même forme; car qu'on imagine tant de formules imaginaires $a + b \sqrt{-1}$, $a' + b' \sqrt{-1}$, $a'' + b'' \sqrt{-1}$, &c. qu'on voudra, il est clair qu'en ajoutant ensemble ces formules, l'expression qui en résultera sera toujours comprise sous la même forme, en faisant $a + a' + a''$ &c. $= M$ & $b + b' + b''$ &c. $= N$. Il est aisé de voir que si on retranche quelques unes de ces formules le résultat sera encore réductible à la même forme.

Si on multiplie $a + b \sqrt{-1}$ par $a' + b' \sqrt{-1}$, le produit $aa' - bb' + (ab' + a'b) \sqrt{-1}$, sera réductible à la même forme $M + N \sqrt{-1}$, laquelle étant encore multipliée par $a'' + b'' \sqrt{-1}$ don-

nera aussi la même forme. Il ne s'agit plus que de la division : or il est visible que ce cas se réduit toujours à une fraction de cette forme

$$\frac{A + B \sqrt{-1}}{C + D \sqrt{-1}}, \text{ dans laquelle le numé-}$$

teur & le dénominateur peuvent être composés par addition, soustraction & multiplication d'autant de formules imaginaires qu'on voudra de la forme $M + N \sqrt{-1}$: or cette fraction peut toujours se réduire à une autre dont le dénominateur soit réel en multipliant tout par $C - D \sqrt{-1}$; car

$$\text{alors il vient } \frac{AC + BD + (BC - AD) \sqrt{-1}}{CC + BD},$$

$$\& \text{ en faisant } \frac{AC + BD}{CC + BD} = M, \frac{BC - AD}{CC + BD} = N,$$

on aura la forme $M + N \sqrt{-1}$.

5°. Il est encore évident que toutes les puissances d'une formule $A + B \sqrt{-1}$, dont l'exposant m est un nombre entier positif, seront comprises dans la forme du théorème. Car $(A + B \sqrt{-1})^m$ n'est autre chose que le produit de $A + B \sqrt{-1}$ multiplié par lui-même un nombre de fois désigné par $m - 1$. Ce sera la même chose si m est un nombre entier négatif ; car alors on a

$$\frac{1}{(A + B \sqrt{-1})^m}, \text{ qui se}$$

$$\text{réduit à la forme } \frac{1}{M + N \sqrt{-1}}.$$

Celle-ci se réduit en multipliant haut & bas par $M - N \sqrt{-1}$, à

$$\text{cette autre } \frac{M - N \sqrt{-1}}{MM + NN},$$

qui est évidemment réductible à la forme du théorème.

6°. La

6°. La formule générale $M + N \sqrt{-1}$ comprend encore le cas de $N = 0$, & par conséquent toutes les quantités réelles. Il peut arriver que le produit des formules imaginaires soit réel, alors $N = 0$: ainsi le produit de $a + b \sqrt{-1}$ par $a - b \sqrt{-1}$ est $= aa + bb$.

7°. Une racine m quelconque d'une quantité imaginaire de la forme $M + N \sqrt{-1}$, sera toujours de la même forme, c'est-à-dire $(a + b \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ sera toujours contenue dans la formule du théorème. Soit $\sqrt{(aa + bb)} = c$, un angle dont le sinus $= \frac{b}{c}$ & le co-sinus $= \frac{a}{c}$, on aura $a + b \sqrt{-1} = c (\cos. p + \sqrt{-1} \sin. p)$. Mais, selon le lemme ci-dessus (32), l'on a $(\cos. p + \sin. p \sqrt{-1})^m = \cos. mp + \sqrt{-1} \sin. mp$, quelque nombre que soit m , même fractionnaire ; donc $(a + b \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(a + b \sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{m}} (\cos. \frac{1}{m} p + \sqrt{-1} \sin. \frac{1}{m} p)$. Mais c étant une quantité réelle aussi bien que a & b , $\frac{1}{m} p$ sera une quantité réelle ; donc $\sqrt[m]{(a + b \sqrt{-1})}$ appartient à la forme $M + N \sqrt{-1}$. Et en général toute expression imaginaire est réductible à la forme $M + N \sqrt{-1}$.

La racine quarrée de $a + \sqrt{-b}$, b étant positif peut s'exprimer généralement par $\pm \left[\sqrt{\left(\frac{a + \sqrt{(aa + b)}}{2} \right)} + \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt{(aa + b)}}{2} \right)} \right]$; car en élevant cette quantité au quarré, on trouve $a + \sqrt{-b}$.

La quantité $\sqrt[3]{-b} = \sqrt[3]{(-1)b} = \sqrt[3]{-1} \sqrt[3]{b}$, se réduit facilement à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & il en est de même pour toutes les quantités imaginaires quelconques*.

35. THÉOREME. La quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$, dans laquelle a & b sont réels, peut toujours se réduire à la forme $\cos. V \pm \sin. V \sqrt{-1}$. Soit pris l'arc V dans un cercle dont le rayon $r = \sqrt{aa + bb}$, & prenant l'arc u semblable dans un cercle dont le rayon $= 1$, on aura $\cos. V = \frac{r}{1} \cos. u = r \cos. u$, & $\sin. V = r \sin. u$; donc $a \pm b\sqrt{-1} = r \cos. u \pm r \sin. u \sqrt{-1}$. Mais si l'on fait $\cos. V = a$, l'on aura $\sin. V = \sqrt{rr - (\cos. V)^2} = \sqrt{aa + bb - aa} = b$; donc $r \cos. u \pm r \sin. u \sqrt{-1} = \cos. V \pm \sin. V \sqrt{-1} = a \pm b\sqrt{-1}$.

REMARQUE I. Si l'on avoit $b\sqrt{-1}$, il est visible qu'on ne pourroit réduire cette quantité à la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'en supposant $M = 0$.

REMARQUE II. L'on a vu ci-dessus (33) que l'arc $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot L. (\cos. u + \sin. u \sqrt{-1})$; donc

* Le quarré de la quantité $a + a\sqrt{-1}$ est $aa + 2aa\sqrt{-1} - aa = 2 \cdot \sqrt{-1}$, en supposant $a = 1$. Donc $(2 \cdot \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = 1 + 1\sqrt{-1}$, ce qui fait voir que la racine de la quantité $2 \cdot \sqrt{-1}$ peut contenir une quantité entièrement réelle, c'est-à-dire, qui n'est affectée d'aucun multiplicateur imaginaire.

en multipliant, de part & d'autre, par rn , l'on aura $rn u = \frac{rn}{\sqrt{-1}} L. (\cos. u + \sin. u \cdot \sqrt{-1})$
 $= L. (\cos. u + \sin. u \sqrt{-1})^{-rn \sqrt{-1}}$ (car $\frac{rn}{\sqrt{-1}} = \frac{rn \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{rn \cdot \sqrt{-1}}{-1}$
 $= -rn \sqrt{-1}$) $= L. \frac{1}{(\cos. u + \sin. u \sqrt{-1})^{rn \sqrt{-1}}}$
 $= L. (\cos. u - \sin. u \sqrt{-1})^{rn \sqrt{-1}}$;
 puisque $\frac{1}{\cos. u + \sin. u \sqrt{-1}} = \cos. u - \sin. u \sqrt{-1}$. En effet, en ôtant la fraction, l'on trouve $\cos. u^2 + \sin. u^2 = 1$, carré du rayon 1 ; donc $L. (\cos. u \pm \sin. u \sqrt{-1})^{\mp rn \sqrt{-1}} = rn u = rn u L. e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; donc $(\cos. u \pm \sin. u \sqrt{-1})^{\mp rn \sqrt{-1}} = e^{rn u}$, quantité réelle. Si l'on fait $M + N \sqrt{-1} = r \cos. u \pm r \sin. u \sqrt{-1}$, ou $\frac{M}{r} + \frac{N}{r} \sqrt{-1} = \cos. u \pm \sin. u \sqrt{-1}$, & qu'on fasse $a = \frac{M}{r}$, $b = \frac{N}{r}$, l'on aura $(a \pm b \sqrt{-1})^{\mp rn \sqrt{-1}} = e^{rn u}$; donc quand on dit que $(a + b \sqrt{-1})^{m \sqrt{-1}}$ peut toujours se réduire à la forme $M + N \sqrt{-1}$. Quelque soit m , on doit entendre que m étant une quantité réelle $= \mp rn$, N sera $= 0$, dans la formule $M + N \sqrt{-1}$, ce qu'il est bon de remarquer.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES LOGARITHMIQUES.

36. L'on a vu dans la première section comment il falloit différencier les quantités logarithmiques & exponentielles, on a vu aussi comment on pouvoit obtenir dans certains cas des intégrales logarithmiques & exponentielles. Nous allons maintenant reprendre la même matière.

Toutes les fois que l'on peut décomposer une formule différentielle fractionnaire en deux facteurs dont le dividende soit la différentielle du diviseur, l'intégrale est égale au logarithme du dénominateur en y ajoutant une constante. Ainsi

S. $\frac{dx}{x} = L. x + C$. Quand nous n'ajouterons point de constante, le lecteur doit y suppléer.

S. $\frac{dz}{a+z} = L. (z + a)$. Mais si la fraction dont on vient de parler contenoit un facteur constant qui n'appartînt pas à la différentielle du dénominateur, on mettroit à part ce facteur, & l'on multiplieroit ensuite l'intégrale par le même fac-

teur. Ainsi S. $\frac{b \cdot 2x dx}{aa + xx} = b S. \frac{2x dx}{aa + xx} =$
 $b.L. (aa + xx); S. \frac{dz}{b \cdot (z+a)} = S. \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{z+a}$
 $= \frac{1}{b} S. \frac{dz}{z+a} = \frac{1}{b} L. (z + a).$

Si la différentielle appartenoit au logarithme d'une fraction, il seroit plus aisé de s'y tromper ;

par exemple , $S. \frac{x dy - y dx}{y^2 x} = L. \frac{y}{x}$.

Soit la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, en suppo-
sant $x = y - a$, & $dx = dy$, elle devient
 $\frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$, dont l'intégrale est

$L.(y + \sqrt{(y^2 - aa)}) + C$, comme il est
facile de s'en assurer en différenciant cette quan-
tité. L'on a aussi $S. \frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}} =$

$L.(x + a + \sqrt{(2ax + xx)})$. La dif-
férentielle $\frac{dx}{\sqrt{(xx - bx + c)}}$ devient (en

faisant $x = y + \frac{b}{2}$) $= \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}}$,

dont l'intégrale est $L. y + \sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}$

$= L.(x - \frac{b}{2} + \sqrt{(xx - bx + c)})$. On a de

même $S. \frac{dx}{\sqrt{(aa + xx)}} = L.(x + \sqrt{(aa + xx)})$;

$S. \frac{dx}{x\sqrt{(aa + xx)}} = \frac{1}{a} L.(\frac{a}{x} + \sqrt{(\frac{aa}{xx} + 1)})$;

$S. \frac{-dx}{a\sqrt{(xx + 1)}} = -\frac{1}{a} (L.x + \sqrt{(xx + 1)})$;

$S. \frac{dx}{x.(1 + L.x)} = L.(1 + L.x)$;

$$S. \left(\frac{dx}{x} \cdot Lx \cdot L.(Lx) \right) = \frac{(Lx)^2}{2} \left(L.(Lx) - \frac{1}{2} \right) ;$$

$$S. \frac{dx Lx}{(1-x)^2} = \frac{x Lx}{1-x} + L.(1-x).$$

A l'égard des quantités exponentielles, on verra (voyez la section première n°. 26), si l'on peut les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre; divisant alors par le premier facteur, l'on aura l'intégrale

$$\text{cherchée. Ainsi la différentielle } x^z \cdot y^z \left(\frac{dx}{x} + dz \cdot Lx \cdot Ly + \frac{z Lx \cdot dy}{y} \right) \text{ est intégrable ;}$$

$$\text{parce que } y^z \left(\frac{dx}{x} + dz \cdot Lx \cdot Ly + \frac{z Lx \cdot dy}{y} \right)$$

est la différentielle du logarithme de x'^z , ou de $y^z Lx$. & l'intégrale est x'^z .

Selon ce qu'on a dit section précédente (18),

$$S. \frac{dx Lx}{x} = \frac{1}{2} (Lx)^2 ; \& S. x^m (Lx)^m dx =$$

$$\frac{1}{m+1} x^{m+1} (Lx)^m - \frac{m}{(m+1)^2} x^{m+1} (Lx)^{m-1} \\ + \frac{m(m-1)}{(m+1)^3} x^{m+1} (Lx)^{m-2} \&c.$$

37. PROBLÈME. Trouver l'intégrale de la différentielle $x^m dx Lx$. à cause de $S. x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$, l'on aura, par la formule $S. dyx = xy - S. xdy$;

$$S. x^n dx L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \times L. x -$$

$$S. \frac{1}{n+1} x^n d L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$$

$$\frac{1}{n+1} S. x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}.$$

Soit proposé d'intégrer la formule $m(L.x)^{m-1} \frac{dx}{x}$,

Je fais $L.x = y$, pour avoir $\frac{dx}{x} = dy$, &
 $(L.x)^{m-1} = y^{m-1}$; donc la formule proposée
 est $= m y^{m-1} dy$, dont l'intégrale $= y^m =$
 $(L.x)^m$. Soit $(L.x^m)^{\frac{1}{m-1}} \frac{dx}{x}$; je fais $x^m = y$.

Donc $m x^{m-1} dx = dy$, $dx = \frac{dy}{m x^{m-1}}$. De
 plus l'on aura $L.x^m = L.y$; substituant ces valeurs,
 la formule proposée devient $\frac{1}{m} (L.y)^{m-1} \frac{dy}{y}$, dont

l'intégrale $= \frac{1}{m \cdot n} (L.y)^n = \frac{1}{m \cdot n} (L.x^m)^n$. L'on

a aussi $S. \frac{dy}{y} = L.y = L.(\frac{1}{y}) = L.1 =$

$L.y = -L.y$, à cause de $L.1 = 0$; ce qu'il
 est bon de remarquer.

38. PROBLÈME. Intégrer la formule $\frac{dx}{1-x} L.x$.

Soit $1-x = u$, ou $x = 1-u$, la formule
 O 4

deviendra $-\frac{du}{u} L.(1-u)$. La différentielle

de $L.(1-u)$ est $= \frac{-du}{1-u} = -du.(1-u)^{-1} =$

$= du - u du - \&c.$ Donc $L.(1-u) =$

$= u - \frac{u^2}{2} - \&c.$ Et $S. -\frac{du}{u} . L.u = C$

$+ u + \frac{1}{4} u^2 + \frac{1}{8} u^3 + \frac{1}{16} u^4 + \frac{1}{32} u^5 + \&c.$

Si l'on veut que cette série soit égale à 0, lorsque $x=0$, ou lorsque $u=1$, l'on aura $C + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \&c. = 0$, ou $C = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \&c.$

39. PROBLÈME. Trouver l'intégrale de la formule $\frac{dx}{(1-x)^2} . L.x$. Je fais $u=1-x$, & la for-

mule devient $\frac{-du}{uu} L.(1-u) = \frac{du}{u} + \frac{1}{2} du$

$+ \frac{1}{3} u du + \frac{1}{4} u^2 du \&c.$ dont l'intégrale $= C +$

$L.u + \frac{u}{1.2} + \frac{uu}{2.3} + \frac{u^3}{3.4} + \frac{u^4}{4.5} \&c.$ Pour que

cette série s'évanouisse lorsque $x=0$, ou lorsque $u=1$, l'on doit avoir $C = -L.1 -$

$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \&c. = -\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \&c.$

Car $L.1 = 0$.

40. PROBLÈME. Supposant que p est une fonction de x , trouver l'intégrale de la formule $dp (L.x)^n$.

Si l'on ajoutoit à cette différentielle la formule $pd(L.x)^n$, on auroit $p(L.x)^n = S.dp(L.x)^n + S.pd(L.x)^n$; donc $S.dp(L.x)^n = p(L.x)^n - S.pd(L.x)^n = p L.x^n -$

$n S. \frac{p dx}{x} (L. x)^{n-1}$; donc si $S. p \frac{dx}{x} = q$, l'on aura de même $S. p \frac{dx}{x} (L. x)^{n-1} = q (L. x)^{n-1} - (n-1) \times S. q \frac{dx}{x} (L. x)^{n-2}$. En opérant de même, & supposant $S. \frac{q dx}{x} = R$; $S. \frac{R dx}{x} = t$, $S. \frac{t dx}{x} = u$ &c. l'on aura $S. dp (L. x)^n = p (L. x)^n - n q (L. x)^{n-1} + n.(n-1).R(L. x)^{n-2} - n.(n-1).n-2.t(L. x)^{n-3}$ &c. Si n est un nombre entier positif, l'intégrale ne contiendra qu'un nombre fini de termes.

EXEMPLE I. Soit la formule $x^m dx (L. x)^2$, l'on aura $n=2$, $p = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $q = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, & $R = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$; donc $S. x^m dx (L. x)^2 = x^{m+1} \times \left(\frac{(L. x)^2}{m+1} - \frac{2 L. x}{(m+1)^2} + \frac{2 \cdot 1}{(m+1)^3} \right)$. Si $m = -1$, l'on aura $S. \frac{dx}{x} (L. x)^2 = \frac{1}{3} (L. x)^3$; ce cas est excepté de la formule générale.

EXEMPLE II. Soit la formule $x^{m-1} dx (L. x)^3$; l'on a $n=3$, $p = \frac{x^m}{m}$; $q = \frac{x^m}{m^2}$; $R = \frac{x^m}{m^3}$, & $t = \frac{x^m}{m^4}$; donc $S. x^{m-1} dx (L. x)^3 = x^m \left(\frac{(L. x)^3}{m} - \frac{3 (L. x)^2}{m^2} + \frac{3 \cdot 2 L. x}{m^3} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{m^4} \right)$. Si m est un nombre entier positif > 0 , cette intégrale devient $= 0$, lorsque $x = 0$.

41. PROBLEME. Trouver l'intégrale de la formule $a^x p dx$, p étant une fonction de x . Puisque $d. a^x$ est $= a^x dx L. a$ par la nature des quantités exponentielles , on aura aussi $S. a^x dx = \frac{1}{L. a} a^x$; donc $S. p a^x dx = \frac{1}{L. a} a^x p$.

$\frac{1}{L.a} S. a^x dp$. Si l'on suppose $dp = q dx$ pour avoir
 $S. a^x q dx = \frac{1}{L.a} a^x q - \frac{1}{L.a} S. a^x dq$, l'on aura cette
réduction $S. a^x p dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q +$
 $\frac{1}{(L.a)^2} S. a^x dq$; & si l'on fait $dq = R dx$, il viendra
cette réduction $S. a^x p dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q +$
 $\frac{1}{(L.a)^2} a^x R - \frac{1}{(L.a)^3} S. a^x dR$, & ainsi de suite. L'on
peut continuer jusqu'à ce que l'on parvienne à une for-
mule intégrable, ou à une forme la plus simple de
son espèce.

EXEMPLE. Soit la formule $a^x x^n dx$, n étant un
nombre entier positif; puisque $x^n = p$, nous aurons
 $S. a^x x^n dx = \frac{1}{L.a} a^x x^n - \frac{n}{L.a} S. a^x x^{n-1} dx$. Si
l'on fait successivement $x = 0, 1, 2, 3$, &c. l'on aura

$$S. a^x dx = \frac{1}{L.a} a^x$$

$$S. a^x x dx = \frac{1}{L.a} a^x x - \frac{1}{(L.a)^2} a^x$$

$$S. a^x x^2 dx = \frac{1}{L.a} a^x x^2 - \frac{2}{(L.a)^2} a^x x + \frac{2 \cdot 1}{(L.a)^3} a^x.$$

$$S. a^x x^3 dx = \frac{1}{L.a} a^x x^3 - \frac{3}{(L.a)^2} a^x x^2 + \frac{3 \cdot 2}{(L.a)^3} a^x x - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(L.a)^4} a^x.$$

$$\text{Et } S. a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{L.a} - \frac{n x^{n-1}}{(L.a)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(L.a)^3} - \right. \\
\left. \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(L.a)^4} + \&c. \right)$$

Soit proposé de trouver l'intégrale de la formule $\frac{a^x dx}{x}$.

Selon ce qu'on a dit dans la première partie de cet ouvrage (courbes algébriques 47), en appelant p le logarithme d'un nombre, ce nombre sera $= 1 + p + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3} \&c.$ Donc puisque $L. a^x = x L. a$, l'on

aura $a^x = 1 + x L. a + x^2 \frac{(L. a)^2}{1.2} + \&c.$ Si l'on

multiplie cette série par $\frac{dx}{x}$, & qu'on intègre en ajoutant une constante, il viendra $S. \frac{a^x dx}{x} = C + L.x + \frac{x L. a}{1}$

$+ \frac{x^2 (L. a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (L. a)^3}{1.2.3.3} \&c.$ Si au lieu de a , l'on prend le nombre e , dont le logarithme hyperbolique soit l'unité, il viendra $S. \frac{e^x dx}{x} = C + L.x + \frac{x}{1} +$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \&c.$ Si l'on fait $e^x = z$, ou $x L. e =$

$x = L. z$, ce qui donne $dx = \frac{dz}{z}$, $\frac{e^x dx}{x} = \frac{z dz}{z L. z} =$

$\frac{dz}{L. z}$, l'on aura $S. \frac{dz}{L. z} = C + L. L. z + \frac{L. z}{1} +$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{(L. z)^2}{1.2} + \&c.$

Pour que cette intégrale s'évanouisse lorsque $z = e$, la constante C doit être infinie, parce que le logarithme de e est infini (négatif) c'est la même chose si l'intégrale doit s'évanouir, lorsque $z = 1$, parce que le terme $L. L. z$ devient alors $= L. 0$. Si z est plus petit que l'unité, $L. z$ devient négatif, & $L. L. z$ imaginaire; & Si l'intégrale est réelle, dans ce cas elle sera imaginaire pour les valeurs de z plus grandes que l'unité, & réciproquement.

Si l'on avoit à intégrer la formule $\frac{x^{m-1} dx}{L. x}$, en

faisant $x^m = z$, on auroit $x^{m-1} dx = \frac{1}{m} dz$, $m L. x =$

$L. z$, ou $L. x = \frac{1}{m} L. z$, & la formule se changeroit en celle-ci $\frac{dz}{L. z}$ dont on vient de parler. L'on peut aussi lorsque l'intégration ne réussit pas, réduire la formule $a^x p dx$ en série, & l'on aura $S. a^x p dx = S. p dx + \frac{L. a}{1} S. p x dx + \frac{(L. a)^2}{1.2} S. p x^2 dx$ &c.; ainsi si $p = x^n$, $S. a^x p dx$ sera $= C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{(L. a) x^{n+2}}{1. (n+2)} + \frac{(L. a)^2 x^{n+3}}{1.2. (n+3)}$ &c. Or il faut remarquer que si $n = -1$, au lieu de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, l'on doit écrire $L. x$.

Soit la formule $\frac{a^x dx}{1-x}$; l'on aura $p = \frac{1}{1-x}$; $q = \frac{1}{(1-x)^2}$; $R = \frac{1.2}{(1-x)^3}$; $t = \frac{1.2.3}{(1-x)^4}$; &c. Donc $S. \frac{a^x dx}{1-x} = a^x \left(\frac{1}{(1-x) L. a} - \frac{1}{(1-x)^2 (L. a)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3 (L. a)^3} \right.$ &c.)

42. PROBLEME. Trouver l'intégrale de la formule exponentielle $x^{n x} dx$. Je réduis $x^{n x}$ en série pour avoir $x^{n x} = 1 + n x L. x + \frac{n^2 x^2 (L. x)^2}{1.2} + \frac{n^3 x^3 (L. x)^3}{1.2.3}$ &c. Multipliant par dx & intégrant chaque terme l'on a $S. dx = x$.

$$S. x dx L. x = x^2 \left(\frac{L. x}{2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

$$S. x^2 dx (L. x)^2 = x^3 \left(\frac{(L. x)^2}{3} - \frac{2(L. x)}{3^2} + \frac{2.1}{3^3} \right).$$

$$S. x^3 dx (L. x)^3 = x^4 \left(\frac{(L. x)^3}{4} - \frac{3(L. x)^2}{4^2} + \frac{3.2.L. x}{4^3} - \frac{3.2.1}{4^4} \right).$$

&c. = &c.

Et en général si l'on substitue ces séries & qu'on les arrange par rapport aux puissances de Lx , l'intégrale sera exprimée par les séries qu'on voit ici.

$$Sx^n dx = \left\{ \begin{array}{l} +x \left(1 - \frac{nx}{2^2} + \frac{n^2x^2}{3^3} - \frac{n^3x^3}{4^4} + \frac{n^4x^4}{5^5} \right. & \&c. \\ + \frac{nx^2}{1} Lx \left(\frac{1}{2^1} - \frac{nx}{3^2} + \frac{n^2x^2}{4^3} - \frac{n^3x^3}{5^4} \right. & \&c. \\ + \frac{n^2x^3}{1 \cdot 2} (Lx)^2 \left(\frac{1}{3^1} - \frac{nx}{4^2} + \frac{n^2x^2}{5^3} - \frac{n^3x^3}{6^4} \right. & \&c. \\ & \&c. \end{array} \right.$$

Soit la formule $e^x(dp + p dx)$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; il est évident que l'intégrale est $= e^x p$.

Il est difficile de donner des règles qui fassent trouver l'intégrale dans des cas semblables, & souvent il faut procéder par conjecture; comme par exemple, si l'on proposoit la formule $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$, on pourra soupçonner que

l'intégrale de cette différentielle est de cette forme $\frac{e^x z}{1+x}$.

Pour s'en assurer, on différenciera l'intégrale supposée,

pour avoir $\frac{e^x (dz(1+x) + xz dx)}{(1+x)^2}$. Comparant avec la

formule proposée, l'on trouve $dz(1+x) + xz dx = x dx$, où l'on voit tout de suite que $z = 1$ & $dz = 0$, ce que les règles ne feroient pas facilement connoître.

La différentielle $dx \sqrt{xx + aa}$ a pour intégrale la quantité $\frac{1}{2}x\sqrt{xx+aa} + \frac{1}{2}aaL(x+\sqrt{xx+aa}) + C$. Si l'on suppose $a = \frac{1}{2}p$, p étant le paramètre d'une parabole ordinaire dont l'ordonnée est y , l'élément de l'arc de cette courbe, sera $\frac{2dy}{p}\sqrt{yy + \frac{1}{4}pp}$. Donc

cet arc sera $= \frac{2}{p} \sqrt{yy + \frac{1}{4}pp} + \frac{1}{4}p L. \left(y + \sqrt{yy + \frac{1}{4}pp} \right) + C$. Or il est visible que $C = -\frac{1}{4}p L. \frac{1}{2}p$.

**DES FORMULES QUI RENFERMENT LA DIFFÉRENCE
D'UN ARC CIRCULAIRE , OU DU LOGARITHME
HYPERBOLIQUE SIMPLE , MULTIPLIÉE OU
DIVISÉE PAR DES SINUS ET DES CO-SINUS.**

43. Nous désignerons le logarithme hyperbolique simple par x au lieu de le désigner par m , comme nous l'avons fait dans les sections coniques (84); & alors, les deux formules qui regardent les sinus & les co-sinus multiples, en désignant le sinus hyperbolique par sh , & le co-sinus hyperbolique par ch , deviendront

$$ch.n.x = \frac{(ch.x + sh.x)^n + (ch.x - sh.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

$$sh.n.x = \frac{(ch.x + sh.x)^n - (ch.x - sh.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

dans ces formules, r désigne le demi-axe de l'hyperbole équilatère, ou si l'on veut le sinus total.

Si dans les formules qu'on a trouvées (géom. 176) on substitue x au lieu de a , l'on aura pour le cercle dont le rayon $= r$, & x un arc quelconque

$$Cof.nx = \frac{(\cos.x + \sqrt{-1} \sin.x)^n + (\cos.x - \sqrt{-1} \sin.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

$$Sin.nx = \frac{(\cos.x + \sqrt{-1} \sin.x)^n - (\cos.x - \sqrt{-1} \sin.x)^n}{2.r^{n-1} \sqrt{-1}}$$

Ces quatre formules ont lieu, quelque soit le nombre n positif ou négatif, & même irrationnel. Nous désignons le sinus d'un arc circulaire x par $\sin.x$, son co-sinus

par $\cot. x$, tangente hyperbolique par $t. h$, co-tangente hyperbolique par $\cot. h$.

REMARQUE. L'on fait que dans le cercle, le co-sinus est au sinus comme le rayon est à la tangente, & que la tangente est au rayon comme le rayon à la co-tangente; or c'est la même chose dans l'hyperbole équilatère (Fig. 8); car soit CP le co-sinus, PM le sinus, le demi-axe $CB = CA = r$, la tangente $Af = t$, les triangles rectangles semblables CAf, CPM , donnent $CP : PM :: CA : Af$, ou $ch : sh :: r : t.h$. Les triangles semblables BFC, CFA (ces triangles ont les angles en F & C , alternes internes à cause des parallèles BF, CA) donnent $Af : CA :: CB : BF$; or BF est la co-tangente correspondante au sinus PM ; donc $t.h : r :: r : \cot. h$. De ces proportions, on conclut

que $s.h.x = \frac{c.h.x.t.h.x}{r}$; si l'on substitue cette

valeur de $s.h.x$ dans les deux premières formules l'on a,

$$c.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n} \left(\frac{(r+t.h.x)^n + (r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}} \right)$$

$$s.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n} \times \left(\frac{(r+t.h.x)^n - (r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}} \right).$$

Maist $t.h = \frac{s.h.r}{c.h}$, donc $t.h.n.x = \frac{r.s.h.n.x}{c.h.n.x} =$

$$r \cdot \left(\frac{(r+t.h.x)^n - (r-t.h.x)^n}{(r+t.h.x)^n + (r-t.h.x)^n} \right), \text{ \& parce que}$$

$$t.h.x : r :: r : \cot. h.x, \text{ l'on a } \cot. h.n.x = \frac{r^2}{t.h.n.x};$$

donc l'on aura la formule suivante, $\cot. h.n.x =$

$$r \cdot \left(\frac{(r+t.h.x) + (r-t.h.x)}{(r+t.h.x) - (r-t.h.x)^n} \right). \text{ Par de sembla-}$$

bles substitutions, l'on trouvera pour le cercle, $\text{tang. } nx =$

$$\frac{r}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{(r+\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n - (r-\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n}{(r+\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n + (r-\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n} \right)$$

$$\cot. nx = \frac{r.\sqrt{-1} \cdot [(r+\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n + (r-\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n]}{(r+\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n - (r-\sqrt{-1}.\text{tang. } x)^n}.$$

44. PROBLÈME. Trouver l'intégrale des formules

$$\frac{ch. x . d . s . h . x - s . h . x . d . ch . x}{r}, \quad \frac{cos . x . d \sin . x - \sin . x . d . cos . x}{r}.$$

Dans la seconde x désigne un arc de cercle dont le rayon $= r$.

Je dis que $S. \frac{ch. x . d . s . h . x - s . h . x . d . ch . x}{r} = x$, x désignant un logarithme hyperbolique simple, &

$S. \frac{cos . x . d \sin . x - \sin . x . d . cos . x}{r} = x$, x étant un arc

de cercle dont le rayon $= r$. Dans l'hyperbole équilatère (Fig. 8.), le secteur CAM divisé par $\frac{r}{2}$ donne le logarithmique hyperbolique simple * correspondant au sinus PM (voyez la section précédente 21); donc le logarithme x multiplié par $\frac{r}{2}$, ou $\frac{rx}{2} = CAM$; or

CAM est égal au triangle CMP moins le demi-segment APM, lequel demi-segment en faisant CP $= c . h . x$, & PM $= s . h$, sera $= S. s . h . x . d . c . h . x$; donc $\frac{rx}{2} = \frac{c . h . x . s . h . x}{2} - S. s . h . x . d . c . h . x$; donc

en différenciant les deux membres de l'équation, réduisant & divisant par $\frac{r}{2}$ l'on a $(A) dx = \frac{c . h . x . d . s . h . x - s . h . x . d . c . h . x}{r}$; donc &c.

Dans le cercle (Fig. 2) en faisant CA $= r$, l'arc AM $= x$, le secteur CAM $= \frac{rx}{2} =$ au triangle CPM + le demi-

* C'est évidemment des logarithmes hyperboliques simples dont il s'agit ici.

segment APM, sera $= \frac{\cos. x \sin. x}{2} + S. - \sin. x . d. \cos. x.$

On met le signe — parce que le secteur croissant, le cosinus décroît; de sorte que sa différentielle est négative.

Donc en différenciant, réduisant & divisant par $\frac{r}{2}$,

on a $dx = \frac{\cos x . d. \sin. x - \sin. x . d. \cos. x}{r}$; donc &c.

45. PROBLÈME. Intégrer les formules $\frac{dx . ch. x}{r}$;
 $\frac{dx . sh. x}{r}$; $\frac{dx \cos. x}{r}$; $\frac{-dx \sin. x}{r}$.

L'on a $S. \frac{dx . ch. x}{r} = sh. x$; $S. \frac{dx . sh. x}{r} = ch. x$;
 $S. \frac{dx . \cos. x}{r} = \sin. x$; $S. \frac{-dx . \sin. x}{r} = \cos. x$. Car

dans l'hyperbole $(ch. x)^2 = r^2 + (sh. x)^2$; donc
 en différenciant, $ch. x . d. ch. x = sh. x . d. sh. x$ ou $d. ch. x =$
 $\frac{sh. x . d. sh. x}{ch. x}$, & $d. sh. x = \frac{ch. x . d. ch. x}{sh. x}$. Ces valeurs

étant successivement substituées dans la formule A (44) ;
 donnent $rdx = ch. x . dsh. x - \frac{(sh. x)^2}{ch. x} . dsh. x$,

$rdx = \frac{(ch. x)^2}{sh. x} . d. ch. x - sh. x . d. ch. x$ ou

$rdx = \frac{d. sh. x}{ch. x} \left((ch. x)^2 - sh. x \right)^2$, $rdx =$

$\frac{d. ch. x}{sh. x} \left((ch. x)^2 - (sh. x)^2 \right)$ ou $rdx = \frac{d. sh. x}{ch. x} r^2$;

$rdx = \frac{d. ch. x}{sh. x} . r^2$ (parce que $(ch. x)^2 - (sh. x)^2 = r^2$)

ou $d. sh. x = \frac{dx ch. x}{r}$; $d. ch. x = \frac{dx . sh. x}{r}$; donc

$sh.x = S. \frac{dx.ch.x}{r}$; $ch.x = S. \frac{dx.sh.x}{r}$. Dans le cercle (Fig. 2), l'on a $CM : MP :: Mm : mn$, $CM : CP :: Mm : Mn$, ou $r : \sin. x :: dx : -d. \cos. x$; $r : \cos. x :: dx : d. \sin. x$; donc $d. \cos. x = \frac{-dx. \sin. x}{r}$, & $S. \frac{-dx. \sin. x}{r} = \cos. x$; $d. \sin. x = \frac{dx. \cos. x}{r}$, & $S. \frac{dx. \cos. x}{r} = \sin. x$.

46. PROPOSITION. L'on a toujours les quatre théorèmes suivans,

$$m. S. (ch.x)^m dx = (m-1)r^2 S. (ch.x)^{m-2} dx + r(ch.x)^{m-1} sh.x.$$

$$m. S. (sh.x)^m dx = -(m-1)r^2 S. (sh.x)^{m-2} dx + r(sh.x)^{m-1} ch.x.$$

$$m. S. (\cos.x)^m dx = (m-1)r^2 S. (\cos.x)^{m-2} dx + r(\cos.x)^{m-1} \sin.x.$$

$$m. S. (\sin.x)^m dx = (m-1)r^2 S. (\sin.x)^{m-2} dx - r(\sin.x)^{m-1} \cos.x.$$

Pour démontrer le premier théorème, je remarque que $d. [(ch.x)^{m-1} sh.x] = (m-1). (ch.x)^{m-2} sh.x + d.ch.x (ch.x)^{m-1}$. Substituant les valeurs de $d.ch.x$, $d.sh.x$ qu'on vient de trouver (45), & $(ch.x)^2 = r^2$ au lieu de $(sh.x)^2$, & multipliant tout par r , il vient $rd[(ch.x)^{m-1} sh.x] = (m-1). (ch.x)^m dx - (m-1)r^2 ch.x)^{m-2} dx + (ch.x)^m dx$; donc $m. (ch.x)^m dx = (m-1)r^2 S. (ch.x)^{m-2} dx + r d[(ch.x)^{m-1} sh.x]$; donc en intégrant, $S. m(ch.x)^m dx = (m-1). r^2 S. (ch.x)^{m-2} dx + r. (ch.x)^{m-1} sh.x$.

Le second théorème se démontre par la formule $d[(s.h.x)^{m-1}ch.x] = (m-1).s.(h.x)^{m-1}ch.x.d.sh.x + (sh.x)^{m-1}d.ch.x$. En faisant les mêmes substitutions que nous venons de faire, excepté que nous substituerons la valeur de $(ch.x)^2 = r^2 + (sh.x)^2$ au lieu de celle de $(sh.x)^2$, nous parviendrons à la formule $r d[(sh.x)^{m-1}ch.x] = (m-1).r^2.(sh.x)^{m-2}dx + (m-1).(sh.x)^m dx + (sh.x)^m dx$; donc en réduisant, transposant & intégrant, $m.S.(sh.x)^m dx = -[(m-1).r^2 S.(sh.x)^{m-2} dx] + r(sh.x)^{m-1}ch.x$.

Pour démontrer le troisième théorème, je me fers de la formule $d.(cos.x)^{m-1}sin.x = (m-1).(cos.x)^{m-2} \times sin.x.dcos.x + (cos.x)^{m-1}d.sin.x$. Substituez les valeurs de $dcos.x$, $d.sin.x$, trouvées ci-dessus (45), écrivez $r^2 - (cos.x)^2$ au lieu de $(sin.x)^2$, & multipliant par r , il viendra $r d[(cos.x)^{m-1}sin.x] = -(m-1)r^2 \times (cos.x)^{m-2} dx + (m-1).(cos.x)^m dx + (cos.x)^m dx$; donc $m.S.(cos.x)^m dx = (m-1)r^2.S.(cos.x)^{m-2} dx + r(cos.x)^{m-1}sin.x$.

Le quatrième théorème se démontre facilement par la formule $d[(sin.x)^{m-1}cos.x] = (m-1).(sin.x)^{m-2} \times cos.x.d.sin.x + (sin.x)^{m-1}d.cos.x$. Si l'on substitue les valeurs de $d.cos.x$, $d.sin.x$, & celle de $(cos.x)^2 = r^2 - (sin.x)^2$, & qu'on s'y prenne comme dans le cas précédent, l'on trouvera $m.S.(sin.x)^m dx = (m-1)r^2 \times S.(sin.x)^{m-2} dx - r.(sin.x)^{m-1}cos.x$.

47. PROBLÈME. Intégrer les formules $\frac{r dx}{(ch.x)^2}$, $-\frac{r dx}{(sh.x)^2}$, $\frac{r dx}{(cos.x)^2}$, $-\frac{r dx}{(sin.x)^2}$. L'on a $S.\frac{r . dx}{(ch.x)^2} = \frac{s h . x}{ch . x}$. Cela suit du premier théorème; car en supposant $m=0$, il en résulte l'équation $0 =$

$$-1 \cdot r^2 S. (ch.x)^{-2} dx + r \cdot (ch.x)^{-1} sh.x; \text{ donc } r S. \frac{dx}{(ch.x)^2} = \frac{sh.x}{ch.x}.$$

Par le second théorème, l'on a dans ce cas, $-r S. \frac{dx}{(sh.x)^2} = \frac{ch.x}{sh.x}$. Le troisième donne $r S. \frac{dx}{(\cos.x)^2} = \frac{\sin.x}{\cos.x}$, & le quatrième fait voir que $-r S. \frac{dx}{(\sin.x)^2} = \frac{\cos.x}{\sin.x}$.

48. PROBLÈME. Intégrer les formules $ch.x \cdot dx$; $sh.x \cdot dx$; $\cos.x \cdot dx$; $\sin.x \cdot dx$. Si dans les quatre théorèmes ci-dessus, l'on fait $m=1$, ou $m-1=0$, l'on aura $S.ch.x \cdot dx = r sh.x$; $S.sh.x \cdot dx = r ch.x$; $S.\cos.x \cdot dx = r \sin.x$; $S.\sin.x \cdot dx = -r \cos.x$.

On voit aussi facilement qu'en faisant $m=2$ dans les mêmes théorèmes ci-dessus, ou $m-2=0$; à cause de $S.(ch.x)^{-2} dx = S.d x = x$, le premier théorème donnera $2 S.(ch.x)^2 dx = r^2 x + r ch.x \cdot sh.x$. Il est aisé de voir que le second théorème donne $2 S.(sh.x)^2 dx = -r^2 x + r sh.x \cdot ch.x$. Par le troisième théorème l'on a $2 S.(\cos.x)^2 dx = r^2 x + r \cos.x \cdot \sin.x$. Et par le quatrième, l'on trouve $2 S.(\sin.x)^2 dx = r^2 x - r \sin.x \cdot \cos.x$.

49. PROBLÈME. Intégrer les formules $\frac{dx}{ch.x}$; $\frac{dx}{sh.x}$; $\frac{dx}{\sin.x}$; $\frac{dx}{\cos.x}$. Nous avons trouvé ci-dessus (45) l'équation $r dx = \frac{d.sh.x}{ch.x} r^2$, d'où l'on tire $dx = \frac{r d.sh.x}{ch.x}$. Substituant cette valeur de dx dans la première formule & multipliant par r , l'on trouve $\frac{r r d.sh.x}{(ch.x)^2} = \frac{r^2 d.sh.x}{r^2 + (sh.x)^2}$. L'intégrale de cette formule est égale à un arc de cercle AM (Fig. 2), dont la tangente $Ab = sh.x$. Cela suit de ce que par la

section précédente (31), $\frac{a a d x}{a a + x x}$ est l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$, & la tangente x ; donc si le rayon $= r$ & la tangente $= s h . x$, l'élément de l'arc sera $= \frac{r r d . s h . x}{r^2 + (s h . x)^2}$; & partant $S. \frac{d x}{c h . x} = \frac{A M}{r}$.

Nous avons encore trouvé (45), $r d x = \frac{d . c h . x}{s h . x} r^2$; donc $d x = \frac{r . d c h . x}{s h . x}$; donc $\frac{r d x}{s h x} = \frac{r^2 . d c h . x}{(s h . x)^2} = \frac{r r d . c h . x}{(c h . x)^2 - r^2}$.

Si dans une hyperbole équilatère dont le demi-axe $C A = r$, l'on prend la co-tangente $B D$ (Fig. 9) $= c h . x = C P$ (Fig. 8), & que par les points C & D , on tire la ligne $C M$, le secteur $C A M$ divisé par $\frac{r}{2}$ ou le logarithme

hyperbolique simple, sera $= S. \frac{-r^2 d . c h . x}{(c h . x)^2 - r^2}$. Cela suit

de ce que l'on a vu dans la section précédente (21), que lorsque le demi-axe de l'hyperbole équilatère est $= a$, & la co-tangente $= z$, l'élément du logarithme hyperbo-

lique simple est $= \frac{-a^2 d z}{z z - a a}$; donc l'intégrale cherchée

(n'ayant pas égard au signe) est égale au secteur $C A M$ divisé $\frac{r}{2}$ & par r , ou est $= \frac{2 . C A M}{r r}$. Il est aisé de

voir que l'hyperbole $A M$ (Fig. 9), dont on se sert pour intégrer est la même que l'hyperbole $A M$ (Fig. 8), dans laquelle on prend $c h . x$.

Pour intégrer la troisième formule, je remarque que nous avons trouvé ci-dessus (45), la proportion

$r : \sin . x :: d x : -d \cos . x$; donc $d x = -\frac{r . d . \cos . x}{\sin . x} = -\frac{1 . d . \cos . x}{\sin . x}$, en faisant $r = 1$, & alors $\frac{d x}{\sin . x} =$

$\frac{-d \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$. En faisant le rayon $= r$, on a $\frac{r d x}{\sin x} =$

$$\frac{-r^2 d \cdot \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\frac{1}{2} r d \cdot \cos x}{r - \cos x} - \frac{-\frac{1}{2} r d \cdot \cos x}{r + \cos x}, \text{ \& en fai-}$$

$$\text{fant } r=1, \text{ S. } \frac{1 d x}{\sin x} = \frac{1}{2} \text{ L. } \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \text{ L. (tangente)}^2 \frac{1}{2} x$$

$= \text{L. tangente } \frac{1}{2} x$. En effet, en supposant $r=1$, l'on

verra aisément que $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\text{tangente})^2 \cdot \frac{1}{2} x$,

comme il suit de la formule $\frac{1 - \cos m}{1 + \cos m} = (\text{tang.})^2 \frac{1}{2} m$,

qu'on a donnée dans la première partie de cet ouvrage (Géomét. 170); or la différentielle logarithmique

de $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ se trouve en divisant la différentielle de

cette quantité par la quantité elle-même, ce qui donne

$\frac{-2 d \cdot \cos x}{1 - (\cos x)^2}$; ainsi $\frac{d \cdot \cos x}{1 - (\cos x)^2}$ n'est que la moitié de cette différentielle.

Il est facile maintenant d'intégrer les formules $\frac{a dx}{\sin x}$, $\frac{a dx + b dx}{\sin x}$, $\frac{a dx - b dx}{\sin x}$. Soit en supposant le rayon du cercle (dans lequel on prend l'arc x) $= 1$ ou $= r$. Car il est visible que la grandeur du rayon ne peut faire de difficulté. En général dès qu'on fait trou-

ver la différentielle logarithmique de $r r \cdot \left(\frac{r - \sin x}{r + \cos x} \right)$,

on peut facilement avoir l'intégrale de $\frac{B dx}{\sin x}$, B étant

une quantité constante, & le rayon de l'arc x étant supposé $= r$.

n étant l'arc de 90 degrés & r le rayon du cercle, on a (voyez la Géométrie N° 139), l'équation

$$(\text{tang.})^2 \left(\frac{n+x}{2} \right) = \pi. \left(\frac{r + \sin. x}{r - \sin. x} \right). \text{Donc en faisant } r=1,$$

$$\text{on trouvera } L. \text{ tang. } \left(\frac{n+x}{2} \right) = L. (1 + \sin. x) +$$

$$L. (1 + \sin. x) - L. (1 - \sin. x). \text{ Mais en supposant}$$

$$\text{toujours } r=1, \text{ l'on a } dx = \frac{d. \sin. x}{\cos. x}, \text{ \& } \frac{dx}{\cos. x} =$$

$$\frac{d. \sin. x}{(\cos. x)^2} = \frac{d \sin. x}{1 - (\sin. x)^2} = \frac{\frac{1}{2} d. \sin. x}{1 + \sin. x} +$$

$$\frac{\frac{1}{2} d. \sin. x}{1 - \sin. x} = \frac{1}{2} d. L. \left(\text{tang. } \frac{n+x}{2} \right)^2; \text{ donc}$$

$$S. \frac{dx}{\cos. x} = L. \text{ tang. } \left(\frac{n+x}{2} \right).$$

50. THEOREME. Si m est un nombre entier positif & impair, les formules $S. (ch. x)^m dx$; $S. (sh. x)^m dx$; $S. (\cos. x)^m dx$; $S. (\sin. x)^m dx$ sont exactement intégrables. Car elles dépendent de l'intégration d'autres formules semblables dans lesquelles l'exposant est $m-2$, celles-ci dépendent d'autres formules semblables dans lesquelles l'exposant est $m-4$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à des formules qui ont l'unité pour exposant, lesquelles (48) sont exactement intégrables; & comme les séries pour les quatre formules suivent la même loi, il suffira de faire voir comment on peut avoir la série qui donne $S. (\cos. x)^m dx$. nous

$$\text{aurons } S. (\cos. x)^m dx = \frac{r}{m} (\cos. x)^{m-1} \sin. x +$$

$$\frac{(m-1)}{m} r S. (\cos. x)^{m-2} dx. \text{ Par la même raison}$$

$$S. (\cos. x)^{m-2} dx = \frac{r}{m-2} (\cos. x)^{m-3} \sin. x +$$

$$\frac{m-3}{m-2} \cdot r^2 \cdot S. (\cos. x)^{m-4} dx; S. (\cos. x)^{m-4} dx =$$

$$\frac{r}{m-4} (\cos. x)^{m-5} \sin. x + \frac{m-5}{m-4} \cdot r^2 \cdot S. (\cos. x)^{m-6} dx,$$

$$\& \text{ ainsi de suite. Donc } S. (\cos. x)^m dx = \frac{r}{m} (\cos. x)^{m-1} \sin. x$$

$$+ \frac{m-1}{m(m-2)} \cdot r^3 (\cos. x)^{m-3} \sin. x + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot r^5 \times$$

$$(\cos. x)^{m-5} \sin. x + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} \cdot r^6 \times$$

$S. (\cos. x)^{m-6} dx$; & en procédant de même, vous aurez une série dont tous les termes seront multipliés par $\sin. x$, les exposans de $\cos. x$, suivent la série $m-1$, $m-3$, $m-5$, & jusqu'à 0, ce qui arrive au dernier

terme. Les coefficients des termes seront $\frac{1}{m}$, $\frac{m-1}{m(m-2)}$,

$\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$, &c. multipliés respectivement par

les termes de la série, r , r^3 , r^5 , &c. le dernier terme étant multiplié par r^m . Si m est un nombre pair positif, l'on parviendra à un terme qui contiendra la seule variable dx qui dans les deux premières formules s'intègre par le moyen de l'hyperbole, & dans les deux autres par un arc de cercle; car x est égal dans les premières, à un secteur hyperbolique divisé $\frac{r}{2}$, & dans les dernières

à un secteur circulaire divisé par $\frac{r}{2}$, ou ce qui revient au même, est égal à un arc de cercle dont le rayon $= r$.

51. Pour traiter plus facilement les cas dans lesquels m est un nombre négatif, il est à propos de changer un peu les formules; & comme la même méthode a lieu pour toutes, il suffira de l'appliquer à la première. Je change le signe de m pour la rendre de négative positive, & il

$$\text{vient } -m \cdot S. \frac{dx}{(ch.x)^m} = -(m+1) \cdot r^2 S. \frac{dx}{(ch.x)^{m+2}} +$$

$\frac{r \cdot sh \cdot x}{(ch \cdot x)^{m+1}}$; donc en transposant, $(m+1)r^2 S. \frac{dx}{(ch \cdot x)^{m+1}} =$

$m \cdot S. \frac{dx}{(ch \cdot x)^m} + \frac{r sh \cdot x}{(ch \cdot x)^{m+1}}$. Supposant $m+2=n$, ou

$n-1=m+1$, l'on aura $(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(ch \cdot x)^n} =$

$(n-2) S. \frac{dx}{(ch \cdot x)^{n-2}} + \frac{r sh \cdot x}{(ch \cdot x)^{n-1}}$. En opérant de même

sur les autres formules, on aura $(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(sh \cdot x)^n} =$

$-(n-2) S. \frac{dx}{(sh \cdot x)^{n-2}} - \frac{rch \cdot x}{(sh \cdot x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(\cos x)^n} = (n-2) S. \frac{dx}{(\cos x)^{n-2}} + \frac{r \sin x}{(\cos x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(\sin x)^n} = (n-2) S. \frac{dx}{(\sin x)^{n-2}} - \frac{r \cos x}{(\sin x)^{n-1}}$.

COROLLAIRE. Si n est pair, il est visible que les formules

$S. \frac{dx}{(ch \cdot x)^n}$, $S. \frac{dx}{(sh \cdot x)^n}$, $S. \frac{dx}{(\cos x)^n}$, $S. \frac{dx}{(\sin x)^n}$,

sont exactement intégrables; car il suit de ce qu'on vient de dire que ces formules dépendent d'autres formules semblables dans lesquelles l'exposant est $n-2$, & celles-ci dépendent d'autres formules dans lesquelles l'exposant est $n-4$ & ainsi de suite. jusques à ce que l'exposant soit 2; or l'on a vu ci-dessus que ces dernières sont exactement intégrables. Si n est impair, on prouvera par un raisonnement semblable, que l'intégration des formules dont on vient de

parler, dépend de l'intégration de celles-ci $\frac{dx}{ch \cdot x}$, $\frac{dx}{sh \cdot x}$,

$\frac{dx}{\cos x}$, $\frac{dx}{\sin x}$, dont la première dépend de la recti-

fication du cercle, la seconde de la quadrature de l'hyperbole, & les deux autres s'intègrent par les logarithmes.

52. Afin de faire comprendre comment on peut intégrer les formules qui renferment à la fois des sinus & des co-sinus, nous allons établir les quatre théorèmes suivans.

$$(m+n) S. (s. h. x)^{m-1} (ch. x)^{n+1} dx = r (sh. x)^n (ch. x)^n + m r^2 S. (sh. x)^{m-1} (ch. x)^{n-1} dx,$$

$$(m+n) S. (ch. x)^{m-1} (sh. x)^{n+1} dx = r (ch. x)^n (sh. x)^n - n r^2 S. (ch. x)^{m-1} (sh. x)^{n-1} dx.$$

$$(m+n) S. (\sin. x)^{m-1} (\cos. x)^{n+1} dx = r (\sin. x)^n (\cos. x)^n + m r^2 S. (\sin. x)^{m-1} (\cos. x)^{n-1} dx.$$

$$(m+n) S. (\cos. x)^{m-1} (\sin. x)^{n+1} dx = -r (\cos. x)^n (\sin. x)^n + n r^2 S. (\cos. x)^{m-1} (\sin. x)^{n-1} dx.$$

Pour démontrer les deux premiers théorèmes, je remarque que la différentielle de $\left((ch. x)^m (sh. x)^n \right)$ est $= m. (sh. x)^n (ch. x)^{m-1} d. ch. x + n (ch. x)^m (sh. x)^{n-1} d. sh. x.$
Or $d. ch. x = \frac{dx. sh. x}{r}$, $d. sh. x = \frac{dx. ch. x}{r}$; donc en substituant, l'on aura la formule $r d \left((ch. x)^m (sh. x)^n \right) = m. (sh. x)^n (ch. x)^{m-1} dx + n (ch. x)^m (sh. x)^{n-1} dx.$

Si dans cette formule on substitue la valeur de $(sh. x)^{n+1} = (sh. x)^{n-1} \cdot \left((ch. x)^2 - r^2 \right)$, l'on aura en transposant, le premier théorème; & si au lieu de $(ch. x)^{m+1}$, l'on substitue $(ch. x)^{m-1} \times \left(r^2 + (sh. x)^2 \right)$, l'on aura le second théorème.

L'on a aussi $d. \left((\cos. x)^m (\sin. x)^n \right) = m. (\sin. x)^n (\cos. x)^{m-1} d. \cos. x + n. (\cos. x)^m (\sin. x)^{n-1} d. (\sin. x).$

Mais $d. \cos. x = \frac{-dx. \sin. x}{r}$, $d. \sin. x = \frac{dx. \cos. x}{r}$;

donc en substituant, il viendra $r d \left((\cos. x)^m (\sin. x)^n \right) =$

— $m \cdot (\sin. x)^{m+1} \cdot (\cos. x)^{n-1} dx + n \cdot (\cos. x)^{n+1} \times (\sin. x)^{m-1} dx$.

Si au lieu de $(\sin. x)^{m+1}$ l'on écrit $(\sin. x)^{m-1} \times (r^2 - (\cos. x)^2)$, & qu'on fasse les transpositions nécessaires, l'on trouvera le troisième théorème; & si l'on substitue $(\cos. x)^{n-1} \cdot (r^2 - (\sin. x)^2)$, au lieu de $(\cos. x)^{n+1}$, l'on aura (en transposant) le dernier théorème;

Si n étant un nombre entier positif ou négatif, m est un nombre entier positif, on doit se servir du premier théorème pour les quantités hyperboliques, & du troisième pour les quantités circulaires. Car si m est impair & $m+1$ pair, l'intégration de la formule $(sh. x)^{m-1} \times (ch. x)^{n+1} dx$ dépend de l'intégrale $S. (sh. x)^{m-1} \times (ch. x)^{n-1} dx$, & celle-ci dépend de $S. (sh. x)^{m-1} \times (ch. x)^{n-3} dx$, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant de $ch. x$ soit $= 0$; ainsi l'intégrale de la formule proposée dépend de celle de $(sh. x)^{m-1} dx = (sh. x)^m dx$, en faisant $n-1 = m$. Mais on peut intégrer cette formule par ce qu'on a dit ci-dessus.

Si m est pair, on parviendra à une formule qui contiendra $ch. x$ ou $\cos. x$ avec l'exposant 1; donc alors l'intégrale de la formule proposée dépend de $S. (sh. x)^{m-1} ch. x. dx = r. S. (sh. x)^{m-1} d. sh. x$, à cause de $ch. x. dx = r d. sh. x$, comme il suit, de ce qu'on a dit ci-dessus (48). Or

$r. S. (sh. x)^{m-1} d. sh. x = \frac{r}{n} (sh. x)^n$, excepté le cas de $n=0$;

car alors l'intégrale est $r L. sh. x$. Il est aisé de voir comment on doit s'y prendre pour les quantités circulaires.

Si m étant un nombre entier positif ou négatif, n est un nombre entier positif, on se servira du second théorème pour les quantités hyperboliques, & du quatrième pour les quantités circulaires. Car par ces théorèmes, l'on démontrera que n étant impair & $n+1$ pair, la formule proposée dépendra de $S. (ch. x)^{n-1} dx$ ou $S. (\cos. x)^{n-1} dx$, qu'on peut obtenir par ce que l'on a

dit ci-dessus. Si n est pair, on réduira la proposée à $S. (ch. x)^{m-1} sh. x. dx$ pour les quantités hyperboliques, & à $S. (cos. x)^{m-1} sin. x. dx$ pour les circulaires; mais $sh. x. dx = r. dch. x$, & $sin. x. dx = -r. dcos. x$, donc on réduira la proposée à une des formules $r. (ch. x)^{m-1} \times dch. x$, $-r. (cos. x)^{m-1} dcos. x$ dont les intégrales sont

$\frac{r}{m}. (ch. x)^m$, $-\frac{r}{m} (cos. x)^m$, excepté le cas de $m=0$:

car alors l'on a les intégrales $r. L. ch. x$, $-r. L. cos. x$.

53. Pour intégrer les formules, en supposant que m & n sont tous les deux des nombres négatifs, il est à propos de changer un peu les théorèmes ci-dessus. Il suffira d'appliquer la méthode au premier, car elle est la même pour tous. En changeant les signes de m & de n , on aura—

$$((m+n)) S. \frac{dx}{(sh. x)^{n+1} (ch. x)^{m-1}} = \frac{r}{(sh. x)^n (ch. x)^m} -$$

$$m.r^2.S. \frac{dx}{(sh. x)^{n+1} (ch. x)^{m+1}}. \text{ Donc } m.r^2 \bar{x}$$

$$S. \frac{dx}{(sh. x)^{n+1} (ch. x)^{m-1}} = \frac{r}{(sh. x)^n (ch. x)^m}$$

$$+ (m+n). S. \frac{dx}{(sh. x)^{n+1} (ch. x)^{m-1}}.$$

En suivant la même méthode les autres théorèmes deviendront :

$$n.r^2 S. \frac{dx}{(ch. x)^{m+1} (sh. x)^{n-1}} = \frac{-r}{(ch. x)^m (sh. x)^n} -$$

$$(m+n). S. \frac{dx}{(sh. x)^{n+1} (ch. x)^{m-1}}.$$

$$m.r^2.S. \frac{dx}{(sin. x)^{n+1} (cos. x)^{m-1}} = \frac{r}{(sin. x)^n (cos. x)^m} +$$

$$(m+n). S. \frac{dx}{(sin. x)^{n+1} (cos. x)^{m-1}}.$$

$$n \cdot r^2 \cdot S. \frac{dx}{(\cos x)^{m+1} \cdot (\sin x)^{n+1}} = \frac{-r}{(\cos x)^m \cdot (\sin x)^n} +$$

$$(m+n) \cdot S. \frac{dx}{(\cos x)^{m+1} \cdot (\sin x)^{n+1}}.$$

L'on doit se servir de ces quatre théorèmes, de même que des quatre précédens: car m étant un nombre entier & positif, l'on doit employer le premier & le troisième théorème. Si m est impair, & $m+1$ pair, l'intégration de la formule dans laquelle l'exposant du co-sinus est $m+1$, dépend de celle de la formule dans laquelle l'exposant du co-sinus est $m-1$, celle-ci dépend de celle dans laquelle l'exposant est $m-3$, & ainsi de suite jusqu'à ce que cet exposant soit $= 0$. Or l'intégration de cette dernière

dépend de $S. \frac{dx}{(\sin x)^{m+1}}$, ou de $S. \frac{dx}{(\cos x)^{m+1}}$, qu'on peut

intégrer, par ce qu'on a dit ci-dessus. Si m est pair & $m+1$ impair, il faut seulement pousser le calcul jusqu'à ce que l'exposant du co-sinus soit $= 1$, si on le pouvoit plus loin, de manière que cet exposant devînt $= -1$, l'on auroit des coefficients $= 0$, qui, en passant aux diviseurs, rendroient les quantités infinies. On se servira de la même manière du second & du quatrième théorème si n est un nombre entier positif. Car si n est impair & $n+1$ pair, l'on arrivera à une formule dans laquelle l'exposant du sinus sera $= 0$, & l'on aura une formule qui contiendra dx divisé par la puissance $m+1$ du co-sinus, formule qu'on fait maintenant intégrer. Si n est pair, l'on parviendra à une formule dans laquelle l'exposant du sinus est $= 1$; on ne doit pas aller plus loin, à cause des diviseurs $= 0$.

54. On voit donc comment on peut procéder lorsque l'un des nombres m , n , est impair. Si l'un & l'autre étoit pair, dans ce cas, par le premier & le troisième théorème, on parviendra aux formules $\frac{dx}{(\sin x)^{m+1} \cos x}$,

$\frac{dx}{(\cos x)^{m+1} \sin x}$. On réduira ensuite (par le second & le quatrième théorème) l'intégration de ces formules à

l'intégration des formules $\frac{dx}{sh. x. ch. x}$, $\frac{dx}{fin. x. cof. x}$,

Il est donc à propos de chercher l'intégrale de ces dernières formules. Je cherche premièrement l'intégrale de la formule $\frac{r^2 dx}{sh. x. ch. x}$. Je substitue au lieu de r^2 ,

sa valeur $(ch. x)^2 - (sh. x)^2$, ce qui donne $\frac{r^2 dx}{sh. x. ch. x} =$

$$\frac{dx. (ch. x)^2 - dx. (sh. x)^2}{sh. x. ch. x} = \frac{dx. ch. x}{sh. x} - \frac{dx. sh. x}{ch. x}. \text{ Mais }$$

$$dx. ch. x = r d. sh. x. \text{ \& } dx. sh. x = r d. ch. x; \text{ donc }$$

$$S. \frac{r^2 dx}{ch. x. sh. x} = r. S. \frac{d. sh. x}{sh. x} - r. S. \frac{d. ch. x}{ch. x} = r L. sh. x -$$

$$r L. ch. x, \text{ \& } S. \frac{dx}{sh. x. ch. x} = + \frac{r L. sh. x - r L. ch. x}{r^2} =$$

$$\frac{1}{r} L. \frac{sh. x}{ch. x}.$$

$$\text{Venons à la formule } \frac{r^2 dx}{fin. x. cof. x} = \frac{dx. (cof. x)^2 + dx. (fin. x)^2}{fin. x. cof. x}$$

$$\left(\text{à cause de } r^2 = (cof. x)^2 + (fin. x)^2 \right) = \frac{dx. cof. x}{fin. x} +$$

$$\frac{dx. fin. x}{cof. x}. \text{ Mais } dx. cof. x = r. d. fin. x, \text{ \& } dx. fin. x = -$$

$$r. d. cof. x; \text{ donc } \frac{r^2 dx}{fin. x. cof. x} = \frac{r d. fin. x}{fin. x} - \frac{r d. cof. x}{cof. x};$$

donc en intégrant & divisant par r^2 l'on aura

$$S. \frac{dx}{fin. x. cof. x} = \frac{1}{r} L. \frac{fin. x}{cof. x}.$$



DE L'INTÉGRATION DES FRACTIONS
RATIONNELLES.

55. Soit la fraction $\frac{x^4 dx}{x^2 - 4}$. En divisant le numérateur par le dénominateur, autant que cela se pourra, l'on réduit la fraction proposée à la différentielle, $x^2 dx + 4 dx + \frac{16 dx}{x^2 - 4}$, dont l'intégrale = $\frac{x^3}{3} + 4x + 4 L. \left(\frac{x-2}{x+2} \right)$. L'on voit par-là qu'on peut toujours parvenir à une fraction dans laquelle l'exposant de la variable dans le dénominateur soit plus grand que dans le numérateur, & cela en divisant le numérateur par le dénominateur, autant qu'il est nécessaire. Ainsi nous supposérons dans la suite que les fractions ont cette condition.

Si la variable avoit quelque exposant négatif, on pourroit le rendre positif en multipliant le numérateur & le dénominateur par l'inconnue élevée à un exposant positif, égal au plus grand exposant négatif. Ainsi dans la fraction $\frac{ax^{-3} dx + x dx}{bx^{-4} - x^2}$, on rendra tous les exposans négatifs en multipliant le numérateur & le dénominateur par x^4 , & l'on aura $\frac{ax dx + x^5 dx}{b - x^6}$; l'on pourra donc supposer que tous les exposans de la variable sont positifs, puisqu'on peut facilement les rendre tels.

Si l'on avoit une fraction $\frac{ax^ndx}{(x^p+bx^q+g)^m}$ on la rendroit rationnelle, pourvu que m fût un nombre entier positif. Car si n est entier & positif, il suffit de chercher une série arithmétique qui comprenne tous les exposans du dénominateur, parmi lesquels on en suppose de fractionnaires. Si n étoit fractionnaire, la série devroit encore comprendre l'exposant n .

Soit la formule $\frac{x^2dx}{x^{\frac{1}{2}}+ax^{\frac{1}{3}}+b}$, je réduis les exposans $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, & je vois facilement que la série $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0$, est la série cherchée. Je prends le terme $\frac{1}{6}$ le plus près de 0, & je fais $x^{\frac{1}{6}} = z$; donc $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$, $x^2 = z^{12}$; de sorte que la formule proposée devient $= \frac{6z^{17}dz}{z^3+az^2+b}$, qui est rationnelle. En général, si le terme de la série le plus approchant de 0 est $\frac{p}{q}$, on fera $x^{\frac{1}{q}} = z$ ou $x^p = z^q$. Si l'on avoit la formule irrationnelle $\frac{x^2dx}{x^{\frac{4}{3}}+ax^{\frac{2}{3}}+b}$, on verroit aisément que la série arithmétique qui renferme tous les exposans du dénominateur, est $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0$; c'est pourquoi en faisant $x^{\frac{2}{3}} = z$, (on fait $x^{\frac{2}{3}} = z^2$ & non pas $= z$, parce que $\frac{2}{3} = \frac{p}{q}$ fait voir que $p = 2$),
l'on

l'on aura $x = z^3$, $x^2 = z^6$, $x^{\frac{4}{3}} = z^4$, & $dx = 3z^2 dz$; donc la formule proposée deviendra $\frac{3z^3 dz}{z^6 + az^4 + b}$, fraction rationnelle.

Soit la fraction $\frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{(x^{\frac{1}{3}} + ax^{\frac{2}{3}} + b)^m}$, la série qui comprend tous les exposans du numérateur & du dénominateur est $\frac{11}{12}, \frac{14}{12}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{1}{3}, 0$. Je fais $x^{\frac{1}{30}} = z$, ou $x = z^{30}$, $dx = 30z^{29} dz$, &c. & la formule proposée devient $\frac{30z^{14} dz}{(z^{10} + az^6 + b)^m}$, fraction rationnelle.

On peut voir par-là qu'il est facile de rendre rationnelles les fractions qui sont dans le cas de celles dont vient de parler.

On voit aussi que l'intégrale de la formule $\frac{a dz}{b+z}$ ou $\frac{dz}{b+z}$ (car la constante a ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration) dépend des logarithmes; de sorte que $S. \frac{dz}{b+z} =$

$L. (b+z)$ & $S. \frac{a dz}{b+z} = a L. (b+z)$. L'on

a aussi $S. \pm \frac{dx}{x \pm b} = \pm L. (x \pm b)$. Mais si

x étoit $< b$, parce que ainsi qu'on l'a remarqué à la fin de la première partie de cet ouvrage, le logarithme d'une quantité négative est imaginaire, du moins ainsi le prétendent de très-

grands Géomètres, & qu'on eût la formule $\pm \frac{dx}{x-b}$,
on écrirait $\mp \frac{dx}{b-x}$, en changeant tous les signes,
& l'on auroit S. $\pm \frac{dx}{x-b} = S. \mp \frac{dx}{b-x} = \pm$
L. $(b-x)$. La formule $\frac{2zdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} + \frac{dz}{z-b}$,
a pour intégrale L. $(b+z) + L.(z-b)$. La
formule $\frac{-2}{b} \cdot \frac{bbdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} - \frac{dz}{z-b}$, a pour
intégrale L. $\frac{z+b}{z-b}$, & la formule $\frac{2bbdz}{bb-zz} = \frac{dz}{b+z}$
 $+ \frac{dz}{b-z}$, a pour intégrale L. $(bb-zz)$.

La fraction $\frac{2azdz}{zz+bb}$ a pour intégrale $a L.(zz+bb)$.

L'intégrale de la fraction $\frac{dz}{zz+bb} = \frac{1}{b^2} \times$
 $\frac{bbdz}{zz+bb}$ est $= \frac{1}{b^2} \cdot f$, f étant un arc de cercle
dont la tangente $= z$ & le rayon $= b$. L'in-
tégrale S. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L. \left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}} \right)$,
comme il est aisé de le vérifier en repassant de
l'intégrale à la différentielle. Mais $\frac{dy}{1+y^2}$ est la dif-
férentielle d'un arc dont le rayon $= 1$ & la tan-
gente $= y$, ainsi cette intégrale qui se présente
sous une forme imaginaire, est cependant très-
réelle. Mais l'arc dont la tangente $= x$ & le
rayon $= 1$, est $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \&c.$ (sec-

tion 2^e. n^o. 31). Donc la somme de la série $x - \frac{x^3}{3} + \&c.$ est $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} L. \left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} \right)$. Si

dans la fraction $\frac{a x d x}{x^2 + c x + g}$ on fait $x + \frac{1}{2} c = z$ ou $x = z - \frac{1}{2} c$, pour avoir $dx = dz$ & $x^2 + c x + g = z^2 - c z + \frac{1}{4} c^2 + c z - \frac{1}{2} c^2 + g = z^2 - \frac{1}{4} c^2 + g = z^2 + b^2$, en faisant $g - \frac{1}{4} c^2 = b^2$; il est visible qu'elle deviendra $\frac{a z d z - \frac{1}{2} a c d z}{z z + b b}$

$\frac{a z d z}{z z + b b} - \frac{\frac{1}{2} a c d z}{z z + b b}$, fraction qu'il est maintenant facile d'intégrer, que $b b$ soit une quantité positive, ou négative, en faisant attention que $\frac{-b b . d z}{z z + b b}$ est la différentielle d'un arc de cercle dont la co-tangente $= z$.

Si on avoit une fraction, de cette forme $\frac{a x d x + f d x}{x^2 + c x + g}$, par la même substitution de $z = x + \frac{1}{2} c$, on la réduiroit en deux autres, dont l'une seroit de la forme $\frac{A z d z}{z z + b b}$, & l'autre de la forme $\frac{B . d z}{z z + b b}$, qui sont faciles à intégrer.

56. La formule $\frac{x^q d x}{(x+a)^p}$, peut s'intégrer facilement par la méthode suivante. Je prends la différentielle de la formule $\frac{x^q}{(x+a)^p}$, de cette manière

$$d. \frac{x^q}{(x+a)^p} = \frac{q x^{q-1} d x}{(x+a)^p} - \frac{p x^q d x}{(x+a)^{p+1}} \quad (\text{en}$$

considérant successivement le numérateur & le

dénominateur comme variables) ; donc

$$S. \frac{x^q dx}{(x+a)^{p+1}} = -\frac{1}{p} \cdot \frac{x^q}{(x+a)^p} + \frac{q}{p} x$$

$$S. \frac{x^{q-1} dx}{(x+a)^p}. \text{ Dans cette formule, je suppose d'a-}$$

$$\text{bord } q = n, p+1 = m, \text{ \& j'ai } S. \frac{x^n dx}{(x+a)^m} =$$

$$-\frac{1}{m-1} \cdot \frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} + \frac{n}{m-1} S. \frac{x^{n-1} dx}{(x+a)^{m-1}}.$$

Faisons maintenant $q = n-1, p+1 = m-1$, pour

$$\text{avoir } S. \frac{x^{n-1} dx}{(x+a)^{m-1}} = -\frac{1}{m-2} \cdot \frac{x^{n-1} dx}{(x+a)^{m-2}} +$$

$$\frac{n-1}{m-2} S. \frac{x^{n-2} dx}{(x+a)^{m-2}}. \text{ En faisant } q = n-2;$$

\& $p+1 = m-2$, on aura facilement la va-

leur de $S. \frac{x^{n-2} dx}{(x+a)^{m-2}}$, \& ainsi de suite ; de sorte

$$\text{que } S. \frac{x^n dx}{(x+a)^n} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} -$$

$$\frac{n}{(m-1) \cdot (m-2)} \cdot \frac{x^{n-1}}{(x+a)^{m-2}} -$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{(m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)} \cdot \frac{x^{n-2}}{(x+a)^{m-3}} \dots +$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1}{(m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \dots (m-n)} S. \frac{dx}{(x+a)^{m-n}}.$$

$$\text{Si } m-n=1, S. \frac{dx}{(x+a)^{m-n}} \text{ fera } = L.(x+a);$$

si $m - n = u$, alors $S. \frac{dx}{(x+a)^{m-n}} = S. \frac{dx}{(x+a)^u} =$
 $S. dx.(x+a)^{-u} = \frac{(x+a)^{-u+1}}{-u+1}$. Si n est $= m$ ou $>$

m , on poussera seulement le calcul jusqu'à ce que l'exposant du dénominateur soit $= 1$, & le dernier terme

sera alors $\frac{n.(n-1).(n-2)...(n-m+1)}{(m-1).(m-2).(m-3)...1} \times S. \frac{x^{n-m+1} dx}{x+a}$.

Supposant $x^{n-m+1} = x^n$, & divisant x^n par $x+a$, jusqu'à ce que la division ne soit plus possible, on aura une suite de termes de cette forme, $x^{u-1} dx + A x^{u-2} dx$. &c. Et le dernier terme sera de cette forme $\frac{B dx}{x+a}$; or tous ces termes sont inté-

grables algébriquement, excepté le dernier qui s'intègre par les logarithmes. Si n étoit négatif, on pousseroit le calcul jusqu'à ce que l'exposant de $x+a$ fût $= 1$, & l'on changeroit le signe de n .

Nous n'avons pas supposé dans cet exemple, que la fraction soit pûre, c'est-à-dire que l'exposant de la variable dans le numérateur soit plus petit que dans le dénominateur.

57. Soit la formule $\frac{dx}{x^n(xx+ga)}$ (a étant une quantité positive, & g étant positif, ou négatif comme on voudra) $= \frac{dx}{ga.x^n + x^{n+2}}$.

Par une continuelle division, on trouve $\frac{dx}{ga.x^n} -$

$$\frac{dx}{g^2 a^2 x^{n-2}} + \frac{dx}{g^3 a^3 x^{n-4}} \&c.$$

Si n est un nombre pair, le dernier terme qu'on doit ajouter sera $\pm \frac{d x}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} (x x + g a)} = \frac{1}{b^n} \cdot \frac{d x}{x x + b b}$

en supposant $g a = b b$. Mais l'on a S. $\frac{b b d x}{x x + b b} = f$, f étant un arc de cercle dont la tangente $= x$ & le rayon $= b$. On a aussi S. $\frac{2 b d x}{x x + b b} = S. \frac{d x}{x + b} - S. \frac{d x}{x - b} = L. \frac{x + b}{x - b}$; ainsi la formule $\pm \frac{d x}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} (x x + g a)}$

dépend, ou de la rectification du cercle, ou des logarithmes. Le signe $+$ a lieu si n est pair, ou un nombre de la série, 4, 8, 12 &c. Mais on doit se servir du signe $-$ si n est impair, ou de la série 2, 6, 10, 14 &c. Si n est impair, il faudra pousser le calcul jusqu'à ce que l'on parvienne à ces deux termes

$$\pm \frac{d x}{g^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x} \mp \frac{x d x}{g^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} (x x + g a)} ;$$

qui s'intègrent tous les deux par les logarithmes. On se servira des signes supérieurs, si n est contenu dans la série 1, 5, 9, 13 &c. mais les signes inférieurs auront lieu si n est un des nombres de la série 3, 7, 11, 15 &c.

58. Soit la fraction $\frac{x^n d x}{(x x + g a)^m}$, à cause qu'en développant le dénominateur on y trouve le terme

($x^n x^m = x^{2m}$, il est nécessaire que $n < 2m$; de plus nous supposons que n & m sont positifs & entiers.

Cela posé, il est aisé de voir que $d. \frac{x^q}{(xx+ga)^p} =$

$$\frac{qx^{q-1} dx}{(xx+ga)^p} - \frac{2px^{q-1} dx}{(xx+ga)^{p+1}}; \text{ donc } S. \frac{x^{q-1} dx}{(xx+ga)^{p+1}} =$$

$$-\frac{1}{2p} \cdot \frac{x^q}{(xx+ga)^p} + \frac{q}{2p} S. \frac{x^{q-1} dx}{(xx+ga)^p}. \text{ Supposez}$$

maintenant $q+1 = n$, $p+1 = m$; donc,

par l'équation qu'on vient de trouver, $S. \frac{x^n dx}{(xx+ga)^m} =$

$$-\frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{x^{n-1}}{(xx+ga)^{m-1}} + \frac{n-1}{2(m-1)} \times$$

$$S. \frac{x^{n-2} dx}{(xx+ga)^{m-1}}. \text{ Faites } q+1 = n-2, p$$

$$+1 = m-1, \text{ pour avoir } S. \frac{x^{n-2} dx}{(xx+ga)^{m-1}} =$$

$$-\frac{1}{2(m-2)} \cdot \frac{x^{n-3}}{(xx+ga)^{m-2}} + \frac{n-3}{2(m-2)} \times$$

$$S. \frac{x^{n-4} dx}{(xx+ga)^{m-2}}. \text{ En faisant } q+1 = n-4,$$

& $p+1 = m-2$, on aura facilement la

valeur de $S. \frac{x^{n-4} dx}{(xx+ga)^{m-2}}$, & ainsi de suite.

L'on continuera le calcul autant qu'il sera nécessaire.

Si n est pair, on continuera jusqu'à ce que l'exposant du diviseur soit $= 1$, auquel cas le

dernier terme de la suite contiendra $S. \frac{x^{n-2m+2} dx}{xx+ga}$,

& comme $n < 2m$, l'exposant de x dans le numérateur sera ou $= 0$, ou négatif. Dans le premier cas l'intégrale dépend du cercle; mais dans

le second, elle s'intègre par la méthode ci-dessus (57). Si n est impair & positif, ou l'on a $n = 2m - 1$, ou $n > 2m - 1$ (si la fraction n'est pas pure). Dans l'un & dans l'autre cas on continuera le calcul jusqu'à ce que l'exposant du dénominateur soit $= 1$, & l'on aura au dernier

terme S. $\frac{x^{n-2m+2} dx}{xx+ga}$. Mais dans le premier

cas l'exposant de x au numérateur sera $= 1$,

& l'on fait que S. $\frac{x dx}{xx+ga} = L. (xx+ga)^{\frac{1}{2}}$.

Dans le second cas l'exposant du numérateur sera > 2 ; donc par une division continuelle, on parvien-

dra à un terme de cette forme $\frac{Bx dx}{xx+ga}$, qu'on

fait intégrer par les logarithmes, & les autres termes seront intégrables algébriquement. Si $n < 2m - 1$, on continuera le calcul jusqu'à ce que l'exposant de x dans le numérateur soit $= 1$,

& l'on aura au dernier terme S. $\frac{x dx}{(xx+ga)^{\frac{2m-n-1}{2}}}$

$=$ S. $\frac{x dx}{(xx+ga)^q}$ q étant un nombre entier;

puisque $\frac{n-1}{2}$ est entier à cause de n impair.

Si $q = 1$, on intègre par les logarithmes; si

$q > 1$, l'on a S. $x dx \cdot (xx+ga)^{-q} = \frac{1}{-q+1} \cdot \frac{(xx+ga)^{-q+1}}{-q+1}$. On voit aussi que S. $\frac{dx}{x^m} =$

$\frac{x^{-m+1}}{-m+1}$; excepté le cas de $m = 1$; car alors S. $\frac{dx}{x^m} = L. x$.

59. Cela posé, je dis que toute fraction rationnelle pure de cette forme

$$\frac{ax^{m-1}dx + bx^{m-2}dx + cx^{m-3}dx + \&c.}{(x+g)^m \cdot f}, \text{ est}$$

intégrable exactement; car en négligeant le facteur commun $\frac{1}{f}$, qui ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration, l'on réduira la fraction proposée en autant de fractions $\frac{ax^{m-1}dx}{(x+g)^m} + \frac{bx^{m-2}dx}{(x+g)^m} + \&c.$ qu'il y a de termes au numérateur, & chacune dépend de la fraction $\frac{x^n dx}{(x+g)^m}$ *, qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (56).

Toute fraction rationnelle pure de cette forme; ou qu'on peut réduire à cette forme

$$\frac{1}{f} \frac{ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx + \&c.}{(xx+ga)^m}$$

est intégrable, car elle est égale à la somme des fractions $\frac{1}{f} a \cdot \frac{x^{2m-1}dx}{(xx+ga)^m}, \frac{1}{f} b \cdot \frac{x^{2m-2}dx}{(xx+ga)^m}, \&c.$ or en faisant $m-1=n$ dans la 1^{re}, $m-2=n$ dans la 2^e, &c. L'intégrale de chacune de ces fractions dépend de S. $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m}$, intégrale qu'on peut trouver par ce qu'on vient de dire (58).

* Si on fait $m-1=n$, la première fraction sera $= a \frac{x^n dx}{(x+g)^m}$.

Toute fraction de cette forme

$$\frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx \&c.)}{(x^2f + hx + L.)^m}$$

$$= \frac{1}{f^m} \cdot \frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + \&c.)}{(x^2 + 2gx + p)^m}$$

(en divisant le numérateur par f^m & le dénominateur par f , qui est censée élevée à la puissance m , & faisant $\frac{h}{f} = 2g$, $\frac{L}{f} = p$) peut être intégrée ; car en supposant $x + g = z$, l'on a $x = z - g$, & $x^2 + 2gx + p = zz + p - g^2 = zz + ga$, en faisant $p - g^2 = ga$. Maintenant si dans le numérateur l'on substitue la valeur de x , l'on aura une fraction de cette forme

$$\frac{a'z^{2m-1}dz + b'z^{2m-2}dz + c'z^{2m-3}dz \&c.}{(zz + ga)^m}$$

qui est de la forme de celle dont on vient de parler & qu'on peut intégrer de même, que ga soit une quantité positive ou négative,

60. Soit maintenant la fraction pure $\frac{pdx}{q}$, p étant une fonction de x dont l'exposant soit moindre que celui de x dans q autre fonction rationnelle de x . Pour intégrer cette fraction, il faut trouver les facteurs de q , ce qui se fait en égalant q à 0, & cherchant ensuite les racines de l'équation $q = 0$.

Si, par exemple, $q = x^3 - ax^2$, je fais $x^3 - ax^2 = 0$; donc $x^2 = 0$, & $x - a = 0$; ainsi les facteurs de q sont x , x & $x - a$, ou x^2 & $x - a$. On réduira ensuite la fraction proposée en d'autres fractions pures dont chacune ait pour dénominateur un des facteurs du

dénominateur de la proposée, & il sera ensuite facile d'intégrer.

Soit $\frac{p dx}{q} = \frac{M dx}{(x+a).N}$, M & N étant des fonctions rationnelles de x . Pour avoir la fraction correspondante au facteur $x+a$, je suppose cette fraction $= \frac{A dx}{x+a}$. A l'égard de la fraction qui, jointe à celle-ci, peut rendre la proposée, je la suppose égale à $\frac{R dx}{N}$; donc $\frac{M dx}{(x+a).N} = \frac{A dx}{x+a} + \frac{R dx}{N}$. Il est évident

que R sera une fonction entière de x ; car autrement, ayant réduit les fractions au même dénominateur, le numérateur ne seroit pas une fonction entière de x ; ce qui est contre la supposition. Je réduis au même dénominateur, & j'ai $\frac{M dx}{(x+a).N} = \frac{A N dx + (x+a).R. dx}{(x+a).N}$.

En comparant les numérateurs, l'on a $M = A N + (x+a).R$, ou $R = \frac{M - A N}{x+a}$; donc puisque R doit être une fonction rationnelle & entière, $M - A N$ doit être exactement divisible par $x+a$; Ainsi en faisant $x+a=0$, ou $x=-a$, l'on aura $M - A N = 0$, ou $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & $A N$ la quantité $-a$ au lieu de x .

61. Soit la fraction pure $\frac{ax dx}{(x-2a).(xx-aa)}$, on demande de trouver la fraction qui convient au facteur $x-2a$. représentant la fraction cherchée par $\frac{A dx}{x-2a}$, celle qui convient à l'autre facteur $xx-aa$, étant $= \frac{R dx}{xx-aa}$, l'on aura

$\frac{ax dx}{(x-2a).(xx-aa)} = \frac{A dx}{x-2a} + \frac{R dx}{xx-aa}$. L'on aura aussi $ax = M$, $xx-aa = N$, & $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le fac-

teur $x - 2a$ égalé à 0. Mais $x - 2a = 0$, donne $x = 2a$; donc $A = \frac{2aa}{3aa} = \frac{2}{3}$; donc la fraction cherchée est $= \frac{2}{3} \cdot \frac{dx}{x - 2a}$.

Pour avoir la fraction $\frac{A dx}{x + a}$, qui convient au facteur $x + a$, l'autre fraction étant $\frac{R dx}{xx - 3ax + 2aa}$. * On remarquera que $M = ax$, & $N = xx - 3ax + 2aa$. Donc $A = \frac{M}{N}$ devient $= \frac{-aa}{6aa} = -\frac{1}{6}$, en substituant $-a$ au lieu de x ; donc la fraction qui convient au facteur $x + a$ est $= \frac{-dx}{6(x + a)}$. Si l'on veut avoir la fraction qui convient au facteur $x - a$, on pourra encore supposer cette fraction $= \frac{A dx}{x - a}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit rendre la proposée étant $= \frac{R dx}{xx - ax - 2aa}$; donc $M = ax$, & $N = xx - ax - 2aa$.

Faites $x = a$, & vous aurez $A = \frac{M}{N} = \frac{aa}{-2aa} = -\frac{1}{2}$; donc la fraction cherchée est $= \frac{-dx}{2(x - a)}$. En effet si l'on réduit au même dénominateur les trois fractions qu'on vient de trouver & qu'on en fasse la somme, l'on aura la fraction proposée. Maintenant je prends les intégrales de ces fractions & leur somme $\frac{2}{3} L.(x - 2a) - \frac{1}{6} L.(x + a) - \frac{1}{2} L.(x - a)$, donne l'intégrale de la fraction proposée.

62 Telle est la méthode qu'on peut suivre pour trouver une fraction simple qui convienne à un facteur, simple qui n'en a pas d'autre qui lui soit égal. Voyons maintenant comment on peut s'y prendre lorsqu'il y a des facteurs égaux.

* Le dénominateur est le produit des facteurs $x - 2a$, & $x - a$.

Soit la fraction pure $\frac{M dx}{N \cdot (x+a)^2}$, dans laquelle N ne contient pas le facteur $x+a$. Supposons que la fraction qui convient au facteur $(x+a)^2$ soit $= \frac{Ax dx + B dx}{(x+a)^2}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit être égale à la proposée, étant $= \frac{R dx}{N}$; donc $\frac{M}{(x+a)^2 \cdot N} = \frac{Ax+B}{(x+a)^2} + \frac{R}{N}$. Multipliant cette équation par N & transposant, il vient $\frac{M - N \cdot (Ax+B)}{(x+a)^2} = R$. Mais R doit être une fonction entière; donc $M - N \cdot (Ax+B)$ sera divisible deux fois exactement par $x+a$. Et en supposant $x = -a$, cette quantité sera $= 0$, ce qui servira à déterminer B ; car alors $M - N \cdot (Ax+B) = 0$, ou $\frac{M}{N} - Ax = B$, en supposant $x = -a$. Si après avoir substitué la valeur de B , on divise la même quantité par $x+a$, parce que le quotient de cette division est encore divisible par $x+a$, en supposant encore $x = -a$, il deviendra $= 0$; d'où l'on tirera une nouvelle équation qui, avec celle qu'on a déjà trouvée, suffira pour déterminer A & B .

Soit la fraction pure $\frac{(ax - 2xx) \cdot dx}{(x+a)^2 \cdot (xx - 2aa)}$. On demande la fraction qui répond au facteur quarré $(x+a)^2$, l'on a $M = ax - 2xx$, $N = xx - 2aa$. La quantité $M - N \cdot (Ax+B)$ qui doit faire trouver les valeurs de A & de B , sera donc $= ax - 2xx + (2aa - xx) \cdot (Ax+B)$. Mettez dans cette quantité $-a$ au lieu de x , pour avoir $-3aa + aa \cdot (B - aA) = 0$; Donc $B = 3 + A \cdot a$. Substituons cette valeur de B dans la même quantité, elle deviendra $ax - 2xx + (2aa - xx) \cdot (Ax + 3 + Aa)$, qui doit être divisible par $x+a$. Disposez-la ainsi, $ax - 5xx + 6aa + (2aa - xx) \cdot A \cdot (x+a)$, ou $(6a - 5x) \cdot (x+a) + (2aa - xx) \cdot A \cdot (x+a)$. Divisez cette quantité par $x+a$, pour avoir $6a - 5x + (2ax - xx) \cdot A$.

Supposant de nouveau $x = -a$, cette dernière quantité devient $11. a + aa. A = 0$; donc $A = -\frac{11}{a}$,

$B = 3 + A. a = 3 - 11 = -8$; & la fraction cherchée est

$$= \frac{-11 x dx - 8 a dx}{a. (x + a)^2}. \text{ Cette fraction est } = \frac{-11 x dx}{a. (x + a)^2} -$$

$$\frac{8 dx}{(x + a)^2}, \text{ dont (56) l'intégrale dépend de S. } \frac{x^m dx}{(x + a)^m},$$

qu'on peut avoir par la méthode ci-dessus. Pour trouver les fractions qui répondent aux facteurs $x + \sqrt{2aa}$, $x - \sqrt{2aa}$, qui résultent du facteur $xx - 2aa$ égalé à 0, on fera $\sqrt{2aa} = b$, & l'on cherchera par la méthode ci-dessus (61), les fractions correspondantes aux facteurs simples $x + b$, $x - b$.

S'il y avoit un facteur triple $(x + a)^3$, la fraction correspondante auroit cette forme $\frac{(Ax^2 + Bx + C). dx}{(x + a)^3}$.

Soit la fraction $\frac{M dx}{(x + a)^3. N}$, N ne contenant pas $x + a$,

l'on aura $\frac{M}{(x + a)^3. N} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x + a)^3} + \frac{R}{N}$. En

raisonnant comme ci-dessus, l'on verra que $R = M - N. (Ax^2 + Bx + C)$, & que cette dernière quantité est divisible par $(x + a)^3$. Supposant dans cette quantité égalée à 0, $x = -a$, l'on aura la valeur de C, exprimée en A & en B, substituant cette valeur de C dans la valeur de R; vous diviserez cette valeur par $x + a$, & égalant ensuite le résultat à 0, vous aurez une équation qui déterminera B. Substituant de même cette valeur de B, divisant par $x + a$, & égalant le quotient à 0, après avoir fait $x = -a$, vous aurez la valeur de A, & en rétrogradant vous connoîtrez B & C. C'est la même méthode s'il y a 4, 5, ou un plus grand nombre de facteurs égaux. Si le nombre des facteurs égaux est m , la fraction correspondante au facteur $(x + a)^m$ sera de cette forme

$$\frac{(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + F) dx}{(x + a)^m}$$

Soit la fraction $\frac{a^6 dx}{(x-a)^5 \cdot x}$. Je cherche d'abord la fraction simple qui convient au facteur x qui n'en a pas d'autre qui lui soit égal. Soit cette fraction $\frac{A dx}{x}$, se-

lon ce qu'on a dit ci-dessus (61) l'on a $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le facteur x égalé à 0 ; donc puisque $M = a^6$, & $N = (-a)^5$,

l'on aura $A = \frac{a^6}{(-a)^5} = -a$, & la fraction cherchée sera $= \frac{-a dx}{x}$. Pour avoir la fraction correspondante

au facteur quintuple $(x-a)^5$, je remarque que $M = a^6$, $N = x$, & $R = M - N \cdot (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$ quantité évidemment $= -Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 - Ex + a^6$ (I). Ayant fait $x = a$, vous trouverez (en égalant à 0), $E = -A \cdot a^4 - Ba^3 - Ca^2 - Da + a^5$. Substituez cette valeur dans la formule (D) pour avoir $-Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 + (Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da - a^5) \cdot x + a^6$. Divisant cette dernière quantité par $x - a$, l'on aura cette seconde formule

$$\begin{aligned} & -Ax^4 - A \cdot a \cdot x^3 - Aaa \cdot x^2 - Aa^3 x - a^5 \\ \text{II.} & -Bx^3 - Ba \cdot x^2 - Ba^2 x \\ & -Cx^2 - Cax \\ & -Dx \end{aligned}$$

Faites $x = a$, pour avoir $-4Aa^4 - 3Ba^3 - 2Ca^2 - Da - a^5 = 0$; donc $D = -4Aa^3 - 3Ba^2 - 2Ca - a^4$. Mettant cette valeur dans la seconde formule, il vient

$$\begin{aligned} & -Ax^4 - Aa x^3 - Aa^2 x^2 + 3a^3 x - a^5 \\ & -Bx^3 - Ba \cdot x^2 + 2Ba^2 x \\ & -Cx^2 + Cax \\ & + a^4 x \end{aligned}$$

Divisez cette quantité par $x - a$ pour avoir la troisième formule III. — $Ax^3 - 2Aa.x^2 - 3Aa^2.x + a^4$

$$\begin{aligned} & - Bx^2 \quad - 2Ba.x \\ & - Cx \end{aligned}$$

Faites dans cette formule $x = a$, & vous aurez l'équation — $6Aa^3 - 3Ba^2 - Ca + a^4 = 0$; donc l'on a $C = -6Aa^2 - 3Ba + a^3$. Substituez cette valeur de C dans la troisième formule pour avoir

$$\begin{aligned} & - Ax^3 - 2A.a.x^2 + 3Aa^2.x + a^4; \text{ Divisez} \\ & - Bx^2 + Ba.x \\ & - a^3.x \end{aligned}$$

cette équation par $x - a$, pour avoir la quatrième formule IV. — $Ax^2 - 3A.a.x - a^3$. Faites $x = a$,
— Bx

& vous aurez l'équation — $4Aa^2 - Ba - a^3 = 0$; donc $B = -4Aa - a^2$. Substituant cette valeur de B dans la quatrième formule, il vient — $Ax^2 + Aax + a^2.x$

— a^3 ; divisant cette quantité par $x - a$, l'on a la cinquième formule V. — $Ax + a^2$. Supposant $x = a$, il vient — $Aa + a^2 = 0$, ou $A = -a$. Donc en rétrogradant l'on a $B = -5a^2$, $C = 10a^3$, $D = -10a^4$, $E = 5a^5$; ainsi la formule cherchée sera

$$\frac{(ax^4 - 5a^2.x^3 + 10a^3.x^2 - 10a^4.x + 5a^5).dx}{(x - a)^5}$$

En effet si l'on ajoute cette fraction avec la fraction — $\frac{adx}{x}$ & qu'on réduise au même dénominateur, l'on trouvera (toute réduction faite) la fraction proposée.

Soit la fraction $\frac{(x^2 - b^2).dx}{x.(xx + bb)}$, la fraction qui vient du facteur x se trouve par la méthode ci-dessus

dessus (61.) $= \frac{-dx}{x}$. Je cherche les facteurs simples que donne le facteur double $xx + bb$, en égalant ce facteur à 0; ce qui donne $x^2 = -bb$, ou $x = \pm b\sqrt{-1} = \pm m$, en supposant la quantité imaginaire $b\sqrt{-1} = m$. Il s'agit donc de trouver les fractions qui conviennent aux facteurs $x - m$ & $x + m$. La fraction qui répond au premier facteur est (par le N°. 61) $= \frac{dx}{x - m}$, & la fraction qui répond au second facteur $x + m$ est $= \frac{dx}{x + m}$. Si l'on réduit ces deux fractions imaginaires au même dénominateur, & qu'on en prenne la somme, l'on aura (en remettant $b\sqrt{-1}$ au lieu de m) $\frac{2x dx}{x^2 + b^2}$, quantité réelle. Intégrant cette fraction, & la fraction $\frac{-dx}{x}$, l'on aura l'intégrale de la fraction proposée $= L.(x^2 + b^2) - L.x = L.\left(\frac{x^2 + b^2}{x}\right)$.

Si l'on avoit intégré les fractions $\frac{dx}{x - m}$, $\frac{dx}{x + m}$ avant de les réduire au même dénominateur, l'on auroit en $L.(x - m) + L.(x + m) = L.(x^2 - m^2) = L.(x^2 + b^2)$, ce qui fait voir que la somme des deux logarithmes imaginaires peut être une quantité réelle. En général si une fraction rationnelle a des facteurs imaginaires la somme des intégrales des deux fractions qui appartiennent à deux facteurs $x - m$, $x + m$, m étant une quantité imaginaire, sera toujours une quantité réelle.

63. Soit la formule $\frac{b^2 dx}{x^3.(x^2 + b^2)}$. La fraction qui répond au facteur double x^2 est $= \frac{b^2 dx}{x^2}$, ce que l'on

trouvera par la méthode ci-dessus (62)*. Le facteur $(x^2 + bb)^2$ donne $(x-m)^2 \cdot (x+m)^2$, en faisant $m = b\sqrt{-1}$. La fraction correspondante au facteur $(x-m)^2$, fera (par la méthode qu'on vient d'expliquer) =

$$\frac{\left(\frac{3}{4}m \cdot x - mm\right) dx}{(x-m)^2}, \text{ la fraction correspondante au facteur}$$

$$(x+m)^2 \text{ étant } = \frac{\left(-\frac{3}{4}m \cdot x - mm\right) dx}{(x+m)^2}. \text{ La somme de}$$

$$\text{ces fractions donne la fraction réelle } \frac{(-b^2 x^2 - 2b^4) dx}{(x^2 + b^2)^2},$$

en substituant la valeur de m . Pour intégrer cette fraction, je la décompose en ces deux-ci $\frac{-b^2 x^2 dx}{(x^2 + b^2)^2}, \frac{-2b^4 dx}{(x^2 + b^2)^2}$:

L'intégration de chacune dépend de l'intégration de la fraction $\frac{x^2 dx}{(x^2 + ga)^m}$, qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (58).

A l'égard de l'intégrale de la fraction $\frac{b^2 dx}{x^2}$, elle est égale à $S. b^2 x^{-1} dx = -b^2 x^{-1} = -\frac{b^2}{x}$.

On peut voir par-là que la somme des fractions que peuvent donner à la fois un même nombre de facteurs $(x-m)^n$ & $(x+m)^n$, sera toujours une fraction réelle quand même m seroit imaginaire.

Si l'on avoit une fraction de cette forme

$$\frac{(ax^{2m+2n+2} + bx^{2m+2n+1}) dx}{x \cdot (x^2 - a^2)^n (x^2 + 2ax + b^2)^m} \text{ on pourroit tou-}$$

* Les Commençans peuvent supposer $x^2 = (x+0)^2$, afin de fixer leur imagination.

jours l'intégrer. Car il est aisé de voir qu'on trouvera facilement la fraction correspondante au facteur x . Le facteur $(x^2 - a^2)^m$, donne $(x - a)^m (x + a)^m$. Le facteur $(x^2 + 2ax + b^2)^m$ égale à 0, donne $x^2 + 2ax = -b^2$, $x^2 + 2ax + aa = a^2 - b^2$, ou $x + a = \pm p$, [en faisant $\sqrt{(a^2 - b^2)} = p$], ou $x + a \mp p = 0$; donc le facteur proposé donnera $(z - p)^m (z + p)^m$, en faisant $x + a = z$, ce qui donne $dx = dz$; Mais on trouvera facilement les fractions correspondantes aux facteurs $(z - p)^m$, $(z + p)^m$, & la somme de ces fractions sera réelle, quand même p seroit imaginaire. Il suffira donc de chercher d'abord les fractions des facteurs simples réels ou imaginaires, qu'on peut représenter par x^m , ou $(x + g)^m$, ou $(x - g)^m$, & pour avoir les fractions que peut donner un facteur double de la forme $x^2 + 2ax + b^2$ dont les racines sont supposées imaginaires, l'on fera $\sqrt{(aa - bb)} = p$, & $x + a = z$, on substituera dz au lieu de dx , & $z - a$ au lieu de x , soit dans la proposée, soit dans les fractions correspondantes aux facteurs $(z - p)^m$, $(z + p)^m$. Si les facteurs de $(x^2 + 2ax + b^2)^m$ étoient réels, on pourroit les représenter par $(x - g)^m$, $(x + f)^m$, & il seroit inutile de faire $x + a = z$. Il n'est pas même nécessaire de le faire dans aucun cas, puisqu'en faisant $a - p = g$, $a + p = f$, on peut représenter les facteurs $(x + a - p)^m$, $(x + a + p)^m$ par $(x + g)^m$, $(x + f)^m$.

64. REMARQUE. Quelque soit le dénominateur d'une fraction rationnelle, on peut, en l'égalant à 0, chercher les facteurs réels, & s'il a des facteurs imaginaires, ils seront en nombre pair, & en multipliant deux à deux ceux qui contiennent la même quantité imaginaire, mais avec des signes différens, & la même quantité réelle avec les mêmes signes, l'on aura des facteurs réels du second degré; or les fractions qui résulteront de ces facteurs donneront des quantités réelles.

COROLLAIRE. On peut conclure de la doctrine qu'on vient d'exposer, que toute fraction ra-

tionnelle est toujours intégrable, ou algébriquement, ou par les logarithmes, ou par les arcs de cercle. Véritablement nous n'avons pas de méthode générale pour trouver les facteurs réels, simples ou doubles du dénominateur d'une fraction rationnelle quelconque; mais c'est un défaut de l'algèbre plutôt que de la méthode d'intégration qu'on vient de développer.

Il ne sera pas inutile de remarquer que si quelque facteur du dénominateur étoit multiplié par une constante a , par exemple, & que l'on eût $a x + g b$ pour un tel facteur, on pourroit diviser ce facteur par a , pour avoir $x + \frac{g b}{a} = x + c$, en faisant $\frac{g b}{a} = c$; Mais on diviserait aussi le numérateur par a . En général, il n'est pas difficile de voir comment il faut s'y prendre pour que chacun des facteurs du dénominateur contienne au premier terme la variable x sans aucune constante.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DE LA RECTIFICATION DE L'ELLIPSE OU DE L'HYPERBOLE, SÉPARÉMENT OU ENSEMBLE.

65. Selon ce qu'on a dit dans la section précédente (38), si l'on fait l'abscisse d'une hyperbole à compter du centre $= z$, l'ordonnée $= u$, le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $= b$, $\frac{b b}{a a} = g$, $z z = \frac{a x + a a}{g + 1}$, $\frac{a a - b b}{a} = p$, la différentielle de l'arc hyperbolique sera $=$

$\frac{d x \sqrt{a x}}{2 \sqrt{(x^2 \pm p x - b b)}}$; Le signe $+$ a lieu si $a a - b b$ est une quantité positive, & le signe $-$ si cette quantité est négative. Mais si l'hyperbole est équilatère, la différentielle de l'arc sera $= \frac{d x \sqrt{a x}}{2 \sqrt{(x x - b b)}}$.

En faisant la puissance de l'hyperbole $= a a$, l'abscisse asymptotique $= z$, $a^2 = g$, $z = x^{\frac{1}{2}}$, l'élément de l'arc hyper-

bolique sera $= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \sqrt{(xx + g^2)}$. Dans l'ellipse en supposant $\frac{b}{a} = g$, l'abscisse du centre $= z$, $zz = \frac{ax - aa}{g - 1}$, $\frac{aa + bb}{a} = p$, l'élément de l'arc elliptique sera $= \frac{dx \sqrt{ax}}{2 \sqrt{(px - xx - bb)}}$.

66. COROLLAIRE I. L'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(xx + bb)}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatère entre les asymptotes perpendiculaires, dont l'équation est $zu = 1$, $b = b$, z étant l'abscisse asymptotique comptée du centre, u l'ordonnée, & en faisant $zz = x$. Car soit s cet arc hyperbolique, on aura $ds = \sqrt{(dz^2 + du^2)} = z^{-2} dz \sqrt{(z^4 + bb)} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx (xx + bb)^{\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{1}{2}} dx (xx + bb)^{\frac{1}{2}} = 2 ds$, & S. $x^{-\frac{1}{2}} dx (xx + bb)^{\frac{1}{2}} = 2s$ plus ou moins une constante C. Il suit de-là que l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{1}{2}} dx (e + fxx)^{\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e & f sont positifs: car $e + fxx = f \cdot (\frac{e}{f} + xx)$; donc $x^{-\frac{1}{2}} dx (e + fxx)^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx (\frac{e}{f} + x^2)^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx (xx + bb)^{\frac{1}{2}}$, en faisant $\frac{e}{f} = bb$.

67. COROLLAIRE II. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$, dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatère dont l'axe $= 2b$, l'équation étant $uu = zz - bb$, z étant l'abscisse comptée du centre, u l'ordonnée au premier axe, & faisant $bx = 2zz - bb$, ou $z = \sqrt{\frac{bx + bb}{2}}$. Car en supposant que cet arc est $= s$,

l'on aura $ds = \frac{dx \sqrt{bx}}{2\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$,
 $\frac{2}{\sqrt{b}} ds = x^{\frac{1}{2}} dx (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{b}} = S. x^{\frac{1}{2}} dx (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il suit de là que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fxx)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole lorsque e est négatif & f positive; car $(e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{f} + xx\right)^{-\frac{1}{2}}$; donc en faisant $\frac{e}{f} = -bb$, l'on aura $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc, &c.

68. COROLLAIRE III. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $= 2b$, le premier $= 2a$, & dont l'équation est $uu = \frac{bb}{aa} (zz - aa)$, en prenant u pour l'ordonnée, & z pour l'abscisse comptée du centre, & en faisant $\frac{bb}{aa} = g$, $z = \sqrt{\left(\frac{ax+aa}{g+1}\right)}$, $\pm p = \frac{aa-bb}{a}$. Car soit s cet arc, l'on aura $ds = \sqrt{(dz^2 + du^2)} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S. x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm p - bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il est aisé de voir que l'intégrale de la différentielle trinôme $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque h étant positif, e est négatif, quel que soit f ; car $e+fx+hx^2 = h\left(\frac{e}{h} + \frac{f}{h}x + x^2\right)$; donc la différen-

* Cela suit du N°. 65, en changeant a en b .

tielle dont on vient de parler est $h^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{h} + \frac{f}{h}x + x^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$
 $= h^{-\frac{1}{2}} (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ en faisant $-bb =$
 $\frac{e}{h}$, & $\pm p = \frac{f}{h}$.

69. COROLLAIRE IV. L'intégrale de la différentielle tri-
 nome $x^{\frac{1}{2}} dx (px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectifica-
 tion d'un arc d'ellipse dont un des axes est $2a$, l'autre
 $2b$, & l'équation $uu = \frac{bb}{aa} (aa - zz)$, en prenant u
 pour l'ordonnée, z pour l'abscisse comptée du centre sur
 l'axe $2a$, & en faisant $g = \frac{bb}{aa}$, $z = \sqrt{\frac{ax - aa}{g - 1}}$,
 & $p = \frac{aa + bb}{a}$; car soit s l'arc de cette ellipse, l'on
 aura $ds = \sqrt{(dz^2 + du^2)} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$,
 & $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S. x^{\frac{1}{2}} dx (px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$.

Il est aisé de voir que l'intégrale de la différentielle
 trimome $x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la recti-
 fication d'un arc elliptique, lorsque f étant positive, e & h
 sont négatifs; car si on fait $f = +c$ quantité posi-
 tive, $e = -q$, & $h = -r$, cette différentielle deviendra
 $= x^{\frac{1}{2}} dx (cx - rxx - q)^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \left(\frac{c}{r}x - xx - \frac{q}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}$
 $= r^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$, en supposant $p =$
 $\frac{c}{r}$ & $bb = \frac{q}{r}$.

* Si e , f & h étoient à la fois négatifs & x positif, la
 différentielle seroit imaginaire.

REMARQUE. Dans l'hyperbole on a $\pm p = \frac{aa - bb}{a}$
 ou $aa \mp p a = bb$; donc en regardant a comme une
 inconnue, on trouvera par la méthode de la résolution
 des équations du second degré, on trouvera, dis-je, $a =$
 $\pm \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p p + b b\right)}$. On ne donne pas le signe -
 au radical, afin d'éviter un axe négatif. Mais dans l'ellipse
 l'on a $p = \frac{aa + bb}{a}$, & $a = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - b b\right)}$.

70. PROBLEME. Trouver l'intégrale de la différentielle
 $x^{\frac{1}{2}} d x (b b - x x)^{-\frac{1}{2}}$. En supposant $x = \frac{b b}{z}$, on aura
 $x^{\frac{1}{2}} = b z^{-\frac{1}{2}}$, $d x = - b b z^{-2} d z$, $x x = b + z^{-2}$; donc
 la différentielle proposée est $= \frac{- b^2 d z}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(z z - b b)}} =$
 $\frac{- z^2 d z - b b d z}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(z z - b b)}} + \frac{z^{\frac{1}{2}} d z}{\sqrt{(z z - b b)}}$, comme il est aisé de
 le voir en réduisant la dernière fraction au dénominateur
 $z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(z z - b b)}$. Or S. $\frac{z^{\frac{1}{2}} d z}{\sqrt{(z z - b b)}}$ est $= \frac{2 s}{\sqrt{b}}$,
 s étant un arc d'hyperbole équilatère dont l'équation est $u u$
 $= y y - b b$, y étant l'abscisse comptée du centre sur le pre-
 mier axe $z b$, & en faisant $y = \sqrt{\left(\frac{b z + b b}{2}\right)}$. Tout cela
 suit du corollaire II (67); Il suffit, pour le comprendre,
 de changer x en z dans l'équation $\frac{2 s}{\sqrt{b}} = S. x^{\frac{1}{2}} d x x$
 $(x x - b b)^{-\frac{1}{2}}$. L'autre différentielle $\frac{- z^2 d z - b b d z}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(z z - b b)}}$ est $=$

$$\frac{-z^2 dz - bb dz}{z^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{z - \frac{bb}{z}}} = \frac{-dz - bb z^{-2} dz}{\sqrt{z - bb z^{-1}}} = \frac{-dt}{t^{\frac{1}{2}}}, \text{ en}$$

faisant $z - bbz^{-1} = t$, ce qui donne $dz + bbz^{-2} dz = dt$,

$$\& \sqrt{z - bbz^{-1}} = t^{\frac{1}{2}}; \text{ donc } S. \frac{-z^2 dz - bb dz}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{z - bbz^{-1}}} =$$

$$-2t^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{z - bbz^{-1}} = -2\sqrt{\left(\frac{bb}{x} - x\right)}$$

$$= -2\sqrt{\left(\frac{bb - xx}{x}\right)}; \text{ donc l'intégrale de la frac-}$$

$$\text{tion proposée est } \frac{2x}{\sqrt{b}} - 2\sqrt{\left(\frac{bb - xx}{x}\right)}, \text{ plus ou}$$

moins une constante ; ainsi l'intégrale de la fraction proposée dépend d'une quantité algébrique & d'un arc hyperbolique.

71. En faisant $x = \frac{bb}{z}$, on trouvera aisément que

l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (bb \pm px - xx)^{-\frac{1}{2}}$ est

$$S. \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{(zz \pm pz - bb)}} - \frac{2\sqrt{(zz \pm pz - bb)}}{\sqrt{z}}. \text{ Or on}$$

fait par le corollaire troisième (68), que l'intégrale de la différentielle $z^{\frac{1}{2}} dz (zz \pm pz - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $= 2b$,

le premier $= 2a$, l'équation étant $uu = \frac{bb}{aa} (yy - aa)$,

en prenant y pour l'abscisse comptée depuis le centre sur le premier axe, u pour l'ordonnée, faisant $g =$

$$\frac{bb}{aa}, \& y = \sqrt{\left(\frac{az + aa}{g + 1}\right)}. \text{ Il suit de-là que l'intégrale}$$

de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e étant positif h est négatif, quelque soit f positive ou négative. Car supposant $h = -c$, on aura $e + fx + hx^2$

$h x^2 = c \left(\frac{e}{c} + \frac{f}{c} - x x \right) = c (b b \pm p x - x x)$ en faisant $\frac{e}{c} = b b$, $\frac{f}{c} = \pm p$; donc $x^{\frac{1}{2}} dx (e + f x + h x)^{-\frac{3}{2}} = c^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (b b \pm p x - x x)^{-\frac{3}{2}}$; donc &c.

72. PROBLÈME. Trouver l'intégrale de la différentielle

$$x^{-\frac{1}{2}} dx (b b - x x)^{-\frac{3}{2}}. \text{ Il est évident que } \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}} = \frac{b dx + x dx - x dx}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}} = \frac{dx (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{b \sqrt{(b b - x x)}}. \text{ Or (70) l'intégrale de } \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(b b - x x)}} \text{ \& par conséquent celle de } \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{b \sqrt{(b b - x x)}} \text{ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole \& d'une quantité algébrique, mais l'intégrale de la différentielle } \frac{dx \cdot (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}} \text{ se trouvera de la manière suivante : parce que } b b - x x = (b + x) \cdot (b - x), \text{ on aura } \frac{dx \cdot (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}} =$$

$$\frac{dx \sqrt{(b + x)}}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b - x)}}; \text{ \& en supposant } b + x = z, \text{ l'on a } dx = dz, \sqrt{(b + x)} = z^{\frac{1}{2}}, x = z - b, b - x = 2b - z, \frac{dx \sqrt{(b + x)}}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b - x)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b \sqrt{(3bbz - zz - abb)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b \sqrt{(pz - zz - cc)}}, \text{ en faisant } 3bb = p, \text{ \& } 2bb = cc; \text{ mais par le corollaire IV (69), l'intégrale de cette dernière différentielle dépend d'un arc d'ellipse ; ainsi on aura S. } \frac{dx \cdot (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}}$$

$$\text{ par la rectification d'un arc elliptique. Donc on aura l'intégrale de la différentielle proposée par une quantité$$

$$\frac{dx \cdot (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}}$$

par la rectification d'un arc elliptique. Donc on aura l'intégrale de la différentielle proposée par une quantité

$$\frac{dx \cdot (b + x)}{b \cdot x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b b - x x)}}$$

algébrique & par la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse ensemble.

73. COROLLAIRE I. La différentielle $x^{-\frac{1}{2}} dx (xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$, en faisant $x = \frac{bb}{z}$ devient $= \frac{-bb z^{-2} dz}{b \cdot z^{-\frac{1}{2}} b z^{-1} \sqrt{(bb - zz)}} = \frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(bb - zz)}}$, qui a la même forme que celle du pro-

blème; donc son intégrale dépend d'une quantité algébrique & de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse.

74. COROLLAIRE II. En faisant $bb = \frac{e}{c}$, & $f = -c$, l'on aura $\sqrt{(e + fxx)} = c^{\frac{1}{2}} \sqrt{(bb - xx)}$. Faisant $e = -c$, on aura $\sqrt{(e + fxx)} = f^{\frac{1}{2}} \cdot \left(xx - \frac{c}{f} \right) = f^{\frac{1}{2}} \sqrt{(xx - bb)}$; en faisant $bb = \frac{c}{f}$; donc l'intégrale de la formule $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} (e + fxx)^{\frac{1}{2}}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, lorsque des deux quantités e & f l'une est positive, & l'autre négative.

75. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(bb + xx)}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, & d'une quantité algébrique. Car en supposant $\sqrt{(xx + bb)} = y - x$, on aura $xx + bb = yy - 2yx + xx$, $x = \frac{yy - bb}{2y}$, $\sqrt{(xx + bb)} = y - x = \frac{yy + bb}{2y}$, $dx = \frac{dy(yy + bb)}{2yy}$, $x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(bb + xx)} = \frac{yy + bb}{2y} \times \frac{\sqrt{(yy - bb)}}{\sqrt{2y}}$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(bb + xx)}} = \frac{dy \sqrt{2}}{y^{\frac{1}{2}} \sqrt{(yy - bb)}}$.

différentielle qui , au multiplicateur $\sqrt{2}$ près, a la forme de celle du corollaire premier (73) ; donc &c.

76. REMARQUE. L'on peut trouver l'intégrale de toutes les différentielles qui dépendent de la rectification des arcs elliptiques & hyperboliques , soit séparément ou ensemble , on peut , dis-je , trouver ces intégrales par des séries , ou par la quadrature de quelque courbe algébrique , en suivant les méthodes que nous avons enseignées ci-devant. Nous pourrions aisément ramener un plus grand nombre de différentielles aux rectifications des arcs elliptiques & hyperboliques , soit séparément ou ensemble ; mais nous avons d'autres objets à considérer.

M. Maclaurin , dans son *Traité des fluxions* , distingue différentes classes ou ordres de différentielles. La première classe comprend celles dont les intégrales peuvent être déterminées exactement en termes finis par des expressions algébriques , ou géométriquement par des figures rectilignes. La seconde classe comprend les différentielles dont les intégrales peuvent se trouver par les tables des sinus & des logarithmes , ou par la quadrature de l'hyperbole , de l'ellipse ou du cercle. La troisième classe renferme celles dont les intégrales supposent la rectification des arcs elliptiques ou hyperboliques. On peut à ces trois classes en ajouter une infinité d'autres : par exemple , on pourroit faire une classe de toutes les différentielles qui supposeroient la rectification d'une courbe algébrique du troisième ordre qui ne seroit pas exactement rectifiable comme la cissoïde.

L'illustre M. d'Alembert auquel les mathématiques doivent tant , a fait beaucoup de recherches sur les différentielles de la troisième classe , & il a ramené un très-grand nombre de formules à la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse , comme on peut le voir dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1746 & 1748.



DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DE TOUS LES ORDRES, ET DE CELLES QUI SONT AFFECTÉES DE SIGNES D'INTÉGRATION, EN SUPPOSANT QU'IL N'Y AIT QU'UNE VARIABLE DANS CHAQUE DIFFÉRENTIELLE, OU S'IL Y A DEUX DIFFÉRENTIELLES DANS LA MÊME FORMULE, QUE L'UNE DES DEUX SOIT CONSTANTE.

77. PROBLÈME. *Intégrer l'équation différentielle $d^m y = p dx^m$ dans laquelle dx est constant, p une fonction de x , & m l'exposant de l'ordre de la différentielle. Puisque dx est constant, on peut le désigner par une constante g , & exprimer ainsi l'équation $d^m y = g^{m-1} p dx$, & en prenant les intégrales de part & d'autre, on aura $d^{m-1} y = g^{m-1} S.p dx + C g^{m-1}$, C étant une constante arbitraire qu'on pourra déterminer par les conditions données; donc en remettant dx au lieu de g , on aura $d^m y = dx^{m-1} S.p dx + C dx^{m-1}$ *; mais parce que p est une fonction de x , on pourra trouver l'intégrale $S.p dx$ par quelque une des méthodes précédentes. Supposant donc $S.p dx = r$, fonction de x , on aura l'équation $d^{m-1} y = r dx^{m-1} + C dx^{m-1} = g^{m-2} r dx + C g^{m-2} dx$; & en intégrant, il viendra $d^{m-2} y = g^{m-2} S.r dx + C g^{m-2} x + D g^{m-2} = dx^{m-2} S.r dx + C x dx^{m-2} + D dx^{m-2}$, D étant encore une constante arbitraire*

* En différenciant cette équation on retrouvera la proposée; car dx étant constant, la différentielle de $C dx^{m-1}$ sera $= 0$.

ou déterminable par des conditions données. On continuera de même à intégrer jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne aucune différentielle ; & il est aisé de voir qu'il faudra faire autant d'intégrations qu'il y a d'unités dans l'exposant m , ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I. Soit $d^2 y$, ou $d d y = a x^m d x^2$; en intégrant de part & d'autre , on trouve $d y = \frac{a x^{m+1} d x}{m+1} + C d x$; & par une seconde intégration , l'on a $y = \frac{a x^{m+2}}{(m+1).(m+2)} + C x + D$.

EXEMPLE. II. Soit $d^3 y = a x^m d x^3 + b x^n d x^3$. La première intégration donnera $d d y = \frac{a x^{m+1} d x^2}{m+1} + \frac{b x^{n+1} d x^2}{n+1} + C d x^2$; par une seconde intégration, l'on aura $d y = \frac{a x^{m+2} d x}{(m+1).(m+2)} + \frac{b x^{n+2} d x}{(n+1).(n+2)} + C x d x + D d x$; & par une troisième intégration, il vient $y = \frac{a x^{m+3}}{(m+1).(m+2).(m+3)} + \frac{b x^{n+3}}{(n+1).(n+2).(n+3)} + \frac{C x^2}{2} + D x + E$, E étant une constante arbitraire , ou qu'on détermine par des conditions données.

78. On peut réduire une différentielle d'un ordre quelconque de la forme $d^m y = a d x d^{m-1} y + p d x^m$ à une équation différentielle du premier ordre , $d x$ étant constant & p une fonction de x ; car en intégrant de part & d'autre , on aura $d^{m-1} y = a d x d^{m-2} y + d x^{m-1} S. p d x +$

$C dx^{m-1}$, C étant une constante *. En intégrant une seconde fois, on trouve $d^{m-2}y = adx d^{m-3}y + dx^{m-2}$. S. $(dx. S. p dx)^* + Cx dx^{m-2} + D. dx^{m-2}$. En intégrant une troisième fois, il vient $d^{m-3}y = a dx d^{m-4}y + dx^{m-3}x$. S. $(dx. S. (dx. S. p dx)) + \frac{Cx^2 dx^{m-3}}{2} + Dx dx^{m-3} + E dx^{m-3}$; & en continuant on parviendra enfin à une équation du premier ordre.

Soit, par exemple, l'équation $ddd y = adx ddy + p dx^3$, on aura par la première intégration, $ddy = adx. dy + dx^2 S. p dx + C dx^2$; & par la seconde intégration, $dy = a \sqrt{dx} + dx \times S. (dx. S. p dx) + Cx dx + D dx = ay dx + t dx + Cx dx + D dx$, en faisant $S. p dx = r$, & $S. r dx = t$.

79. THÉORÈME. p étant tout ce qu'on voudra, si dx est constant, on aura l'intégrale $S. p dx =$

$$px - S. x dp = px - \frac{x^2 dp}{2 dx} + S. \frac{x^2 ddp}{2 dx} = px - \frac{x^2 dp}{2 dx} + \frac{x^3 ddp}{2.3. dx^2} - S. \frac{x^3 d^3 p}{2.3. dx^2} = px - \frac{x^2 dp}{2 dx} + \frac{x^3 ddp}{2.3. dx^2} - \frac{x^4 d^3 p}{2.3.4. dx^3} + S. \frac{x^4 d^4 p}{2.3.4. dx^3} = px \text{ \&c.}$$

On démontre ce théo-

* Cette constante peut être = 0.

** Nous parlerons bien-tôt de la manière dont on peut avoir les intégrales des quantités qui renferment des signes d'intégration.

rême en prenant les différentielles des deux membres de chaque équation, car on les trouve égales. Ainsi dans la première équation $S. p dx = px - S. x dp$, on trouve en différenciant, $p dx = p dx + x dp - x dp = p dx$. Dans la seconde

$$\text{équation, } px - S. x dp = px - \frac{x^2 dp}{2 dx} +$$

$$S. \frac{x^2 d d p}{2 dx}, \text{ ou } S. x dp = \frac{x^2 d p}{2 dx} +$$

$$S. \frac{x^2 d d p}{2 dx}; \text{ en différenciant de part \& d'autre,}$$

$$\& \text{ supposant } dx \text{ constant, on a } x dp = \frac{2 x dx dp}{2 dx} - \frac{x^2 d d p}{2 dx} + \frac{x^2 d d p}{2 dx} = x dp; \&$$

$$\text{ainsi des autres. Donc } S. p dx = px - \frac{x^2 dp}{2 dx} +$$

$$\frac{x^3 d d p}{2.3. dx^2} - \frac{x^4 d^3 p}{2.3.4. dx^3} + \frac{x^5 d^4 p}{2.3.4.5. dx^4} - \&c. \text{ ce qui}$$

donne la série trouvée par M. Jean Bernouilli, dans les actes de Léipsick, année 1694.

Lorsque p est une fonction de x , on délivre cette série de toute différentielle. Car soit $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = t dx$, &c. on aura

$$S. p dx = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - \frac{x^4 t}{2.3.4} + \&c.$$

$$= px - S. q x dx = px - \frac{x^2 q}{2} +$$

$$S. \frac{x^2 r dx}{2} = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - S. \frac{x^3 t. dx}{2.3}$$

$$= px \&c. *.$$

* Selon M. Fontaine (voyez ses Mémoires), pour avoir $S. y dx$, y étant une fonction de x , on doit

Avant de passer au théorème suivant nous remarquerons que l'on a toujours $d \cdot u z \equiv u dz +$

multiplier $\frac{1}{2^{n-1}} x$ par une suite dont on trouvera le premier terme en mettant $\frac{1}{2^n} x$ au lieu de x dans la fonction y ; le second terme se trouvera en substituant $\frac{3x}{2^n}$ au lieu de x dans la même fonction y ; le troisième en substituant $\frac{5x}{2^n}$ au lieu de x ; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui se trouvera en substituant $\frac{2^n - 1}{2^n}$ au lieu de x , & cela d'autant plus exactement que n sera un plus grand nombre. Ce qu'on vient de dire de $S. y dx$ doit s'entendre également de $S. p dx$ lorsque p est une fonction de x . On voit aisément que les valeurs substituées de x forment une progression arithmétique $\frac{1x}{2^n}, \frac{3x}{2^n}, \frac{5x}{2^n}, \frac{7x}{2^n}, \&c.$ (n est l'exposant de 2). Par exemple, si l'on suppose $p = \sqrt{(2x - x^2)}$, $p dx$ sera l'élément de l'aire d'un demi-cercle dont le diamètre $= 2$, & le rayon $= 1$, & selon cette règle l'aire $S. p dx$ sera $=$

$$\frac{x}{2^n} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \frac{x}{2^n} - \frac{x^2}{2^{2n}}} + \sqrt{2 \cdot \frac{3x}{2^n} - \left(\frac{3x}{2^n}\right)^2} + \&c. \right),$$

d'autant plus exactement que le nombre positif n sera plus grand. Si $n = 5$, & $x = 1$; le quart du cercle dont le rayon $= 1$, sera $= \frac{1}{2^9} \cdot (\sqrt{63 \cdot 1} + \sqrt{61 \cdot 3} + \sqrt{59 \cdot 5} + \dots + \sqrt{33 \cdot 31})$. Pour avoir le premier terme de la suite, on fera attention qu'en supposant $x = 1$, la fraction $\frac{x}{2^n}$ devient $= \frac{1}{2^n}$; mais la quantité sous le signe du premier radical est alors $=$

$z du$; donc $uz = S. u dz + S. z du$. Ainsi nous aurons le lemme suivant.

LEMME. $S. u dz = uz - S. z du$.

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{2^{2n}} = \frac{63}{2^{2n}} = 63 \cdot 1, \text{ en faisant passer } \frac{1}{2^{2n}}$$

hors du signe. Il n'est pas difficile de voir comment on a trouvé les autres termes; le point indique la multiplication. Si l'on vouloit l'aire entière du cercle, on multiplieroit tout par 4, quarré de 2, & pour cela il suffiroit, en laissant tout le reste, d'écrire $\frac{1}{2^7}$ au

lieu de $\frac{1}{2^9}$.

Par la même règle on aura $S. \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2^{n-1}} x \times$

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2^n}} + \frac{1}{1 + \frac{3x}{2^n}} + \frac{1}{1 + \frac{5x}{2^n}} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \frac{7x}{2^n}} + \&c. \right) = 2x \left(\frac{1}{2^n + x} + \frac{1}{2^n + 3x} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^n + 5x} + \&c. \right). \text{ Pour déterminer la constante } C$$

qu'on doit ajouter à ces sortes de séries, je remarque que la première série qu'on a trouvée pour le cercle devient $= 0$, lorsque $x = 0$; donc $C = 0$. Il en est de même

pour la série $2x \left(\frac{1}{2^n + x} + \&c. \right)$. Donc si alors la série

doit être 0, la constante sera $= 0$. Mais si par la nature de la question, on trouvoit une série $= A$, lorsque $x = 0$ doit donner une série $= 0$, l'on auroit, $A + C = 0$, ou $C = -A$. Par cette méthode l'on peut trouver par approximation l'intégrale d'une différentielle quelconque à une seule variable.

80. THÉORÈME. p étant une variable quelconque, on a les équations suivantes :

$$\text{I. } \int dx \int p dx = x \int p dx - \int p x dx.$$

$$\text{II. } \int dx \int dx \int p dx = \frac{x^2 \int p dx - 2x \int p x dx + \int p x^2 dx}{2}.$$

$$\text{III. } \int dx \int dx \int dx \int p dx = \frac{x^3 \int p dx - 3x^2 \int p x dx + 3x \int p x^2 dx - \int p x^3 dx}{2 \cdot 3}.$$

$$\text{IV. } \int dx \int dx \int dx \int dx \int p dx = \frac{x^4 \int p dx - 4x^3 \int p x dx + 6x^2 \int p x^2 dx - 4x \int p x^3 dx + \int p x^4 dx}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Et généralement, si le nombre des $\int dx$ qui précèdent $\int p dx$, est m , Et que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m$ désigne le produit de tous les nombres de la suite $1, 2, 3, 4, 5$ &c. jusqu'au terme m de cette suite inclusivement, on aura l'équation suivante,

$$\int dx \cdot \int dx \dots \int p dx = \left[x^m \int p dx - \frac{m}{1} x^{m-1} \int p x dx + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \int p x^2 dx - \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int p x^3 dx \dots \pm \int p x^m dx \right] : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots m)^*.$$

* Les deux points indiquent une division.

le signe supérieur a lieu lorsque m est un nombre pair, & le signe — si m est impair. En prenant les différentielles des deux membres des quatre premières équations, on les trouvera égales; d'où l'on pourra conclure que la dernière équation doit avoir lieu; mais on peut démontrer le théorème de cette autre manière. On trouve la première équation $S. dx. S. p dx = x. S. p dx - S. p x dx$ par le lemme précédent, en supposant $S. p dx = u$ & $x = z$, ce qui donne $p dx = du$, $p x dx = z du$, $dx = dz$, $dx. S. p dx = u dz$, $u z = x S. p dx$; donc par le lemme, $S. u dz = S. dx. S. p dx = u z - S. z du = x S. p dx - S. p x dx$. On trouve la seconde équation par la première & par le même lemme: car puisque $S. dx. S. p dx = x. S. p dx - S. p x dx$, en multipliant de part & d'autre par dx , il vient $dx. S. dx. S. p dx = x dx S. p dx - dx S. p x dx$; & en prenant les intégrales, on a $S. dx. S. dx. S. p dx = S. x dx. S. p dx - S. dx. S. p x dx$. Or en supposant $S. p dx = u$, & $x dx = dz$ dans l'intégrale $S. x dx. S. p dx$, on a $p dx = du$, $\frac{1}{2} x^2 = z$, $u z = \frac{1}{2} x^2 S. p dx$, $z du = \frac{1}{2} p x^2 dx$, $u dz = x dx S. p dx$, & $S. u dz = S. x dx. S. p dx = u z - S. z du = \frac{x^2 S. p dx - S. p x^2 dx}{2}$. En

Supposant $S. p x dx = u$, & $x = z$ dans l'intégrale $S. dx. S. p x dx$, on a $p x dx = du$, $dx = dz$, $u z = x S. p x dx$, $z du = p x^2 dx$, $u dz =$

$$x dx S. p x dx, \text{ \& par le lemme, } S. u dz = \\ S. dx. S. p x dx = u z - S. z du = x S. p x dx - \\ S. p x^2 dx = \frac{2 x S. p x dx - S. p x^2 dx}{2};$$

$$\text{donc } S. x dx. S. p dx - S. dx. S. p x dx = \\ x^2 S. p dx - S. p x^2 dx - 2 x S. p x dx + 2 S. p x^2 dx = \\ x^2 S. p dx - 2 x S. p x dx + S. p x^2 dx$$

On trouve de même la troisième équation par la seconde & par le lemme; la quatrième par la troisième & par le lemme, &c.; Et en observant la loi de ces équations, on parvient à l'équation générale.

81. REMARQUE. Supposons que l'on a une suite de courbes MA, MB, MC, &c. (fig. 10) qui aient une abscisse commune MP & terminées dans la même ordonnée indéfinie PF, & telles que l'aire PAM = A de la première, divisée par une ligne que je fais = 1, soit égale à l'ordonnée de la seconde, l'aire de la seconde divisée par 1 soit égale à l'ordonnée de la troisième, & ainsi de suite. Supposons encore que p fonction de x est l'ordonnée de la première courbe; de manière cependant que p dx, différentielle de l'aire A ne soit pas intégrable. Nous appellerons la quadrature S. p dx = A, quadrature transcendante du premier degré, la quadrature B de la seconde courbe, transcendante du second degré, & ainsi de suite selon l'ordre des courbes; or l'on peut réduire ces quadratures transcendentes à la rectification des courbes algébriques. Car A =

S. $p dx$; & parce que $\frac{A}{1}$ est l'ordonnée de la seconde courbe , $A dx = dx S. p dx$ sera la différentielle de l'aire B ; donc $B = S. dx. S. p dx$. L'on aura de même l'aire C de la troisième courbe $= S. [dx S. (dx S. p dx)]$; &c. Mais $S. dx S. p dx = x S. p dx - S. p x dx$ & en général la quadrature transcendante d'une courbe du degré $m + 1$ se réduit à cette

$$\text{forme } \overline{\overline{S. dx S. dx S. dx \dots S. p dx}} = x^m S. p dx - \frac{m}{1} x^{m-1} S. p x dx \dots \pm p x^m dx$$

1. 2. 3. 4. . . . m

Il ne reste donc qu'à réduire par les méthodes ci-dessus (n°. 19 & suivans) les quadratures $S. p dx$, $S. p x dx$, $S. p x^2 dx$, &c. à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a de termes affectés de S , & en substituant dans la série précédente , on aura la quadrature transcendante du degré $m + 1$ réduite à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a d'unités dans $m + 1$.

82. REMARQUE II. Soit $p = y$ l'ordonnée de la première courbe , l'ordonnée de la seconde sera $= S. y dx$ $= S. y dx$, &c. donc la quadrature transcendante de la courbe de l'ordre $m + 1$ sera $=$

$$x^m S. y dx - \frac{m}{1} x^{m-1} S. y x dx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} S. y x^2 dx \dots \pm S. y x^m dx$$

1. 2. 3. 4. 5. . . . m

Il n'est pas difficile de voir que le théorème pré-

cédent peut être utile pour l'intégration des différentielles à deux variables *.

* Il est évident qu'en supposant $p = y$, il y aura plusieurs variables; c'est-à-dire deux variables dans la différentielle de l'aire de la quadrature transcendante de la courbe de l'ordre $m+1$; donc cette aire, qu'on peut avoir au moins par approximation, sera $= S. dx. S. dx... S. y dx$ & la différentielle de l'aire sera $= dx. S. dx... S. y dx$.

Pour avoir la surface des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne peut pas avoir autrement, supposons qu'on ait une formule différentielle $y dx$, & qu'on ait besoin de connoître l'intégrale $S. y dx$, sans avoir y exprimé en x . Pour cela on considérera les valeurs de y comme les ordonnées d'une courbe dont est x l'abscisse & y l'ordonnée, & l'on calculera arithmétiquement un grand nombre de valeurs de y , & la surface de cette courbe correspondante aux y ainsi calculés sera à peu près l'intégrale cherchée. Si les trois ordonnées $PM(a)$, $Tm(b)$, $Nn(c)$ (Fig. 11) répondent aux abscisses AP , AT , AN , & que l'on ait $PT = TN = 1$, la surface $PMnN$ sera (en considérant l'arc Mn comme une ligne droite) $= \frac{a+b}{2} + \frac{c+b}{2}$, & s'il y avoit un plus grand nombre d'ordonnées f, g &c. on auroit pour les espaces suivantes $\frac{c+f}{2} + \frac{f+g}{2}$ &c.

Mais si l'arc Mmn qui joint trois ordonnées consécutives est un arc de courbe parabolique déterminé par ces trois ordonnées, voici la manière de trouver la surface de l'espace $PMnN$.

Dans une courbe du genre parabolique dont l'équation est $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. Si l'on a trois ordonnées a, b, c correspondantes aux abscisses

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES A
PLUSIEURS VARIABLES.

83. THÉOREME. Si p est une fonction quelconque des variables $x, y, z, u, \&c.$ on aura la dif-

$0, 1, 2$, la surface $P M n N$ sera $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$, comme on le verra bien-tôt. Substituons pour A, B, C des fonctions de a, b, c , telles qu'en mettant zéro au lieu de x (l'origine des x est ici supposé en P) l'on ait $y = a$, que mettant 1 au lieu de x , l'on ait $y = b$, & qu'en mettant 2 au lieu de x , l'on ait $y = c$. Ces conditions seront remplies en faisant $y = a + (b - a) \cdot x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) \cdot x \cdot (x - 1)$. Alors l'élément $y dx$ de $P M n N$ sera $= a dx + (b - a) \cdot x dx + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) \cdot (xx dx - x dx)$; donc l'espace $P M n N$ ou $S. y dx$ sera $= ax + \frac{b - a}{2} x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$. Si dans cette expression on fait $x = 2$, l'on aura la surface cherchée $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$. Si l'on avoit une suite d'ordonnées $a, b, c, e, f, g, \&c.$ Le segment compris entre les ordonnées c, e, f (on suppose leur distance $= 1$) seroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}e + \frac{1}{3}f$; & en général l'aire de la courbe seroit égale à un tiers de la première & de la dernière ordonnée, plus $\frac{4}{3}$ de la seconde & de la quatrième, &c; C'est-à-dire des termes de rang pair, + $\frac{2}{3}$ de la troisième, de la cinquième, &c, c'est-à-dire, des termes de rang impair.

Les lettres $a, b, c, \&c.$, quand il s'agit de l'aire de la courbe désignent, après l'opération, des surfaces & non des lignes; De sorte que si l'ordonnée $a = 1$ pied,

férentielle $d p$; premièrement en faisant varier x & considérant les variables y, z, u , &c. comme constantes ; secondement en différentiant comme si y étoit variable, tout le reste étant constant, & ainsi de suite : la somme de toutes ces différentielles sera la différentielle cherchée. Par exemple, pour différencier la fonction $x y z$, je considère x seul comme variable, ce qui me donne $y z d x$, je différencie ensuite en regardant y seul comme variable & j'ai $x z d y$, & enfin je traite à son tour z comme variable pour avoir $x y d z$; & la

l'ordonnée $b = 2$ pieds & l'ordonnée $c = 3$ pieds, la surface désignée par $\frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{1}{3} c$ vaudra 4 pieds quarrés.

Supposons que x représente un arc de cercle & qu'on veuille avoir $S. (a - \cos. x)^m d x$ lorsque $x = 90^\circ$ degrés, on pourra supposer $d x = 1$ degrés si l'on veut, & chercher les ordonnées $(a - \cos. x)^m$ d'une courbe dont x seroit l'abscisse, en supposant successivement $x = 0, x = 2^\circ, x = 4^\circ$. &c. jusqu'à $x = 90^\circ$ inclusive-ment, ce qui donnera 46 ordonnées. On en trouvera tout autant pour le second quart de cercle. On ajoutera ensemble le tiers de la première & de la dernière, &c. comme on vient de l'expliquer & l'on aura la valeur du moins approchée de $S. (a - \cos. x)^m d x$. Supposons $m = 2, a = 3$ & le rayon $= 1$, on cherchera, par le moyen des tables, les valeurs de $\cos. x$, dans la supposition de $x = 0$, de $x = 2^\circ$, &c. Retranchant successivement ces valeurs de $a = 3$, & prenant le quarré du reste, on aura toutes les ordonnées nécessaires pour avoir par approximation la valeur de l'intégrale dont on vient de parler. Si on avoit calculé les ordonnées de degré en degré, on auroit fait le premier $x = 1^\circ$; Mais $(a - \cos. x)^m d x$ auroit toujours été l'élément de l'aire de la courbe dont la surface doit donner l'intégrale de la formule proposée.

différentielle entière est $\equiv yzdx + xzdy + xydz$. Ce qu'on trouveroit de même en différentiant à l'ordinaire ; ce théorème ne paroît pas avoir besoin de démonstration.

84. COROLLAIRE. Si p ne contient que deux variables x & y , qu'on ait, par exemple, $p \equiv axy$, la différentielle dp pourra être représentée par $A dx + B dy$. Dans la supposition dont on vient de parler $A \equiv ay$, & $B \equiv ax$, A étant une quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de x seul variable, & B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de y seul variable. Si p contient trois variables x, y, z , l'on pourra représenter dp par $A dx + B dy + D dz$, A étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de x variable, B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de y variable, D étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de z variable ; & ainsi de suite. Si on suppose $p \equiv xyz$, l'on aura $A \equiv yz$, $B \equiv xz$, $D \equiv xy$.

85. Lorsque la différentielle dp a un intégrale, on peut la trouver en intégrant dans son expression $A dx + B dy + D dz + \&c.$ 1°. Le terme $A dx$, en regardant x seul comme variable, 2°. Le terme $B dy$ en regardant y seul comme variable, & ainsi de suite, jusqu'au dernier terme *, & en comparant toutes ces intégrales ; car si elles sont toutes les mêmes, on aura dans la première $S. A dx$ l'intégrale cherchée. Si elles sont

* Cela doit s'entendre toujours en ajoutant une constante.

différentes, on ajoutera à ce qu'elles ont de commun, tous les termes qui font leurs différences pour avoir l'intégrale p , à laquelle on ajoutera une constante C . Voici la raison de ce procédé : puisqu'on a trouvé le premier terme $A dx$ en différenciant dans la supposition que x seul étoit variable, en intégrant $A dx$ dans la même supposition, on aura une intégrale $S. A dx$ qui rendra p dans la même supposition. Mais parce que p peut contenir des termes dans lesquels x ne se trouve pas & que tous ces termes s'évanouissent lorsqu'on différencie dans la supposition de x seul variable, on ne retrouvera pas ces termes dans l'intégrale $S. A dx$, mais on les trouvera dans les autres intégrales $S. B dy$, $S. D dz$, &c. dont les différentielles ont été trouvées en supposant que y , z , &c. étoient variables successivement : car $B dy$ étant la différentielle de p dans la supposition de y variable, les termes de p dans lesquels se trouve y n'ont pas été détruits par la différenciation de p qui a donné $B dy$; on les trouvera donc dans l'intégrale $S. B dy$, & ainsi des autres.

Soit la différentielle $A dx + B dy = 3y^2 x^2 dx + 2ayx dx + b dx + 2yx^3 dy + ax^2 dy + 2cy dy$. L'on aura $A = 3y^2 x^2 + 2ayx + b$, $B = 2yx^3 + ax^2 + 2cy$. En intégrant $A dx$ dans la supposition de x seul variable, on a $S. A dx = y^2 x^3 + ayx^2 + bx$; & en intégrant $B dy$ dans la supposition de x constant & de y variable, on trouve $S. B dy = y^2 x^3 + ax^2 y + cy^2$. En comparant ces intégrales on trouve que leurs termes communs sont

$y^2 x^3 + ax^2 y$, & que leurs termes différens sont cy^2 & bx . Ajoutant les termes communs avec les termes différens, l'on aura l'intégrale cherchée $y^2 x^3 + ax^2 y + bx + cy^2 + C$, en ajoutant une constante C .

86. REMARQUE. I. On voit par-là qu'en suivant cette méthode on intègre à chaque fois comme s'il n'y avoit qu'une variable, & que cette opération se réduit à l'intégration d'une formule différentielle qui ne renferméroit qu'une variable.

REMARQUE II. Si l'on avoit une formule $ax^2 dx + by^m dy + cz^{p-1} dz$, pourvu que chaque terme ne renfermât qu'une seule variable, on en auroit l'intégrale

$$\frac{ax^3}{3} + \frac{by^{m+1}}{m+1} + c L. z, \text{ en prenant}$$

celle de chacun de ses termes. Si on a la formule $z^n y^m dx$, on pourra l'intégrer facilement lorsque le facteur différentiel $y^m dx$ sera à $z^p dz$ en raison donnée de $b : a$, quelque soit l'exposant p .

$$\text{Car on aura } a : b :: z^p dz : y^m dx = \frac{b z^p dz}{a};$$

$$\text{donc la différentielle } z^n y^m dx \text{ sera } = \frac{b z^{p+n} dz}{a};$$

$$\text{dont l'intégrale est } = \frac{b z^{p+n+1}}{a(p+n+1)}, \text{ excepté le cas où}$$

$$p + n = -1 : \text{ car alors l'intégrale est } = \frac{b}{a} L. z.$$

87. THÉOREME. Si P est une fonction quelconque composée de deux variables x, y & de constantes, & que par conséquent dP soit $= A dx + B dy$, la différentielle de $A dx$ prise dans la supposition de x

constant & de y variable, sera égale à la différentielle de B d y prise on supposant y constant & x variable. Si dans la fonction P on substitue $x + d x$ au lieu de x , $y + d y$ au lieu de y , & que par ces substitutions P devienne P' , on aura $d P = P' - P = A d x + B d y$. Si dans la fonction P on substitue seulement $x + d x$ au lieu de x , en considérant y comme constant, & que par cette substitution P devienne T ; en substituant ensuite dans T , $y + d y$ au lieu de y , T deviendra P' : puisque c'est la même chose de substituer en même tems dans P les deux quantités $x + d x$ au lieu de x & $y + d y$ au lieu de y , ou de substituer d'abord dans P la quantité $x + d x$ au lieu de x pour changer P en T & de substituer ensuite dans T , $y + d y$ au lieu de y . Par la même raison si on substitue d'abord dans P la quantité $y + d y$ au lieu de y pour changer P en t ; en substituant ensuite dans t , la quantité $x + d x$ au lieu de x , l'on changera t en P' .

Donc si on différentie P en supposant x variable & y constant, la différentielle sera $T - P = A d x$, & si l'on différentie P en supposant x constant & y variable, la différentielle sera $t - P = B d y$. Mais parce qu'en substituant $y + d y$ au lieu de y dans P & T , T devient P' & P devient t , & que par conséquent $T - P$ devient $P' - t$, la différentielle de $T - P$, ou de $A d x$, est $P' - t - T + P$, en retranchant $T - P$ de $P' - t$.

De même puisqu'en substituant dans P la quantité $y + d y$ au lieu de y , P devient t , & $t - P$ devient $B d y$, & qu'en substituant dans t & dans P la quantité $x + d x$ au lieu de x , t devient P' & P devient T , & que par conséquent $t - P$ devient P'

— T , la différentielle de $B dy$, ou de $t - P$, sera, en supposant x constant & y variable, sera, disj-e, $\equiv P' - T - t + P = A dx$; donc, &c.

88. COROLLAIRE I. Donc la différentielle $d(A dx)$ prise en supposant dx constante & y variable est égale à la différentielle $d(B dy)$ prise en supposant seulement x variable; donc $dA dx \equiv dB dy$, ou $\frac{(dA)}{dy} \equiv \frac{(dB)}{dx}$; c'est-à-dire, qu'une différentielle $A dx + B dy$ ne peut être intégrable & donner une intégrale finie P , si en prenant la différentielle de A en faisant varier y & divisant cette différentielle par dy , le quotient n'est pas égal à la différentielle de B prise en faisant varier x & divisant par dx .

89. COROLLAIRE II. Si P est une fonction de trois variables x, y & z , & que par conséquent l'on ait $dP = A dx + B dy + C dz$; on aura les trois équations $\frac{(dA)}{dy} \equiv \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} \equiv \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} \equiv \frac{(dC)}{dy}$, en prenant la différentielle du numérateur de chaque fraction, dans la supposition que l'on fait varier, la seule variable qui se trouve au dénominateur. Car puisque $A dx + B dy + C dz$ est la différentielle de P , fonction des variables x, y & z , si on suppose z constant, le dernier terme s'évanouira & la différentielle dP sera $\equiv A dx + B dy$, & l'on aura (88) $\frac{(dA)}{dy} \equiv \frac{(dB)}{dx}$. Si on suppose y constant, $B dy$ s'évanouira & l'on aura $dP \equiv$

$A dx + C dz$; donc $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$. Si on suppose x constant, l'on trouvera $dP = B dy + C dz$; donc $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; donc si la différentielle $A dx + B dy + C dz$, ne donne pas les trois équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, cette différentielle n'aura pas d'intégrale finie P . Si l'on a $A dx + B dy + C dz + D t$, pour que cette différentielle ait une intégrale finie, il est nécessaire que l'on ait les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dt} = \frac{(dD)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, $\frac{(dB)}{dt} = \frac{(dD)}{dy}$, $\frac{(dC)}{dt} = \frac{(dD)}{dz}$; &c. ainsi de suite pour un nombre quelconque de variables. On doit donc avoir autant d'équations qu'il y a de manières réellement différentes de combiner les lettres A, B, C, D , &c. deux à deux *. (On peut consulter le Traité des Combinaisons dans nos Institutions Mathématiques, dernière édition).

* Pour trouver ces combinaisons il n'y a d'abord, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, qu'à comparer le premier coefficient à tous les autres, chercher ensuite les équations que donne le second coefficient comparé à tous ceux qui le suivent ; on cherchera de même les équations que donne le troisième comparé avec tous ceux qui le suivent, &c. ainsi de suite, &c. l'on aura facilement toutes les équations qu'on cherche. Voyez ce que nous avons dit dans notre algèbre lemme 11. N°. 39.

90. LEMME. Supposant que A est une fonction de y & de x & qu'on ait trouvé l'intégrale $S. A dx$ en considérant x seul comme variable, si on différencie cette intégrale en faisant varier y seulement,

la différentielle $d. S. A dx$ sera $\equiv dy S. \frac{(dA)}{dy} dx$.

l'expression (dA) signifie qu'on prend la différentielle de A en faisant varier seulement y dont la différentielle se trouve au dénominateur. Soit P une fonction de y & de x , l'on aura $dP \equiv A dx + B dy$, & $\frac{(dA)}{dy} \equiv \frac{(dB)}{dx}$ (88); donc $dB \equiv$

$\frac{(dA)}{dy} dx$, & en intégrant dans la supposition de x

seul variable, on aura $B \equiv S. \frac{dA}{dy} dx$, &

$B dy \equiv dy S. \frac{dA}{dy} dx$; donc la différentielle

totale $A dx + B dy \equiv A dx + dy S. \frac{dA}{dy} dx$;

mais $S. A dx$ étant l'intégrale P , l'on aura $d(S. A dx) \equiv B dy$, en faisant varier y seul dans $S. A dx$.

Soit $P \equiv ax^3y^3$, l'on aura $dP \equiv 2axy^3 dx + 3ax^2y^2 dy \equiv A dx + B dy$; donc $A \equiv$

$2axy^3x$, $B \equiv 3ax^2y^2$, $dA \equiv 6ay^2x dy$;

en faisant varier seulement y , $\frac{(dA)}{dy} \equiv 6ay^2x$;

ainsi l'on aura $S. \frac{(dA)}{dy} dx \equiv 3ay^2x^2$

(en intégrant dans la supposition de y constant); &

$dy S. \frac{(dA)}{dy} dx \equiv 3ax^2y^2 dy \equiv B dy$.

On

On appelle *différentielles complètes* celles qui sont intégrables dans l'état où elles sont.

91. THÉORÈME. Si une différentielle ne donne pas les équations dont on a parlé ci-dessus, elle n'est pas complète; mais on peut l'intégrer, si elle les donne. La première partie du théorème suit de ce qu'on a dit ci-dessus, la seconde partie suit du lemme. Car supposons la différentielle $dP =$

$$A dx + B dy = A dx + dy \cdot S. \frac{A}{dy} \cdot dx$$

(Par le lemme précédent); l'intégrale P sera $= S. A dx$ en regardant x seul comme variable; or on peut évidemment avoir l'intégrale de $A dx$ en supposant que A est une fonction de constantes, ou qu'elle ne contient d'autres variables que x . Si on trouvoit plus de fa-

cilité à prendre l'intégrale de $dy \cdot S. \frac{A}{dy} \cdot dx$, on

pourroit la prendre, cela reviendrait au même.

Soit $dP = A dx + B dy = 2axy dx + 2ax^2 dy$, l'on aura $S. A dx = ax^2 y$, en regardant y comme constant; l'on aura de même

$$S. B dy = S. dy \cdot S. \frac{dA}{dy} \cdot dx = ax^2 y, \text{ en re-}$$

gardant dans $S. \frac{dA}{dy} \cdot dx$, x seul comme variable

& regardant dans la seconde intégration y seul comme variable. Si l'on avoit la différentielle $dP =$

$A dx + B dy + C dz$, elle seroit complète

si l'on avoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} =$

$\frac{(dC)}{dy}$: car il suit du lemme qu'en prenant convena-

blement les différentielles, l'on auroit $dS. dA. dx$

$\equiv B dy, d S. d A dx \equiv C dz, d S. d B dy \equiv C dz$; donc $S. d A. dx \equiv P$, en regardant dans A , x seul comme variable & ainsi de même pour un plus grand nombre de variables.

92. REMARQUE I. Le lemme précédent suppose que l'intégrale P de la différentielle $A dx + B dy$ est une fonction de x & de y mêlés ensemble dans tous les termes de P , & que par conséquent il y a plusieurs variables dans tous les termes de dP : car si l'on suppose $P \equiv ax^2y + by^2$, l'on aura $A \equiv 2axy$, & $B \equiv ax^2 + 2by$; or l'on a $S. A dx \equiv S. 2axy. dx \equiv ax^2y$, & $d S. A dx \equiv ax x dy$, en regardant dans $S. A dx$, y comme constant & dans $d S. A dx$, y seul comme variable; donc on auroit $ax^2 dy \equiv B dy$ & $ax^2 \equiv ax^2 + 2by$, ce qui est absurde; ainsi quand dans une différentielle il y aura un terme tel que $2by dy$ qui ne contiendra qu'une variable, on peut l'intégrer à part comme ne faisant point partie de la différentielle; autrement l'on ne peut avoir $A dx + B dy \equiv A dx + dy. S. \frac{dA}{dy}. dx$. S'il y a trois termes dans la différentielle $dP \equiv A dx + B dy + C dz$, il faut pour que la démonstration du théorème ait lieu, que chaque terme contienne les trois variables x, y, z . Si outre ces termes il en avoit un qui ne contînt qu'une seule variable, on l'intégreroit comme ne faisant pas partie de la différentielle; & si outre les trois termes dont on vient de parler, il y en avoit deux

* Sous le nom de variables on comprend les différentielles dy, dx .

qui renfermassent chacun les mêmes deux variables x & y , par exemple, on les intégreroit à part (comme ne faisant pas partie de la différentielle), si l'on avoit, à l'égard de ces termes, l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, sans quoi ils ne seroient point intégrables. Mais de quelle manière que la chose arrive, si on ne veut pas faire toutes ces attentions, on peut se contenter de voir si la différentielle proposée satisfait aux équations du n°. 88 & 89 : car alors elle sera complète.

93. PROBLÈME. *Etant donnée une différentielle du premier ordre à tout de variables qu'on voudra, trouver si elle est complète ou exacte, & l'intégrer lorsque cela arrive.* On cherchera si la différentielle fournit toutes les équations qui doivent avoir lieu selon les corollaires ci dessus (88 & 89) ; si elle ne donne pas ces équations, elle n'est pas complète, & on l'abandonnera ; si elle les donne, on trouvera son intégrale ou exacte, ou dépendante des quadratures par la méthode suivante, qui revient à celle du n°. 85. Soit la différentielle $A dx + B dy + C dz + D du + \dots$, qu'on suppose complète ; on prendra l'intégrale $S. A dx$ en supposant x seul variable, on prendra de même l'intégrale $S. B dy$ en regardant y seul comme variable, on rejettera de cette intégrale tous les termes qui se trouvent déjà dans $S. A dx$, & on ajoutera le reste R à l'intégrale $S. A dx$. On prendra $S. C dz$ en considérant z seul comme variable & l'on ajoutera à $S. A dx + R$ tous les termes de $S. C dz$ qui ne se trouvoient pas déjà dans cette première quantité, pour avoir $S. A dx + R + R'$. On pren-

dra $S. D. du$ en considérant u seul comme variable, & rejettant tous les termes qui se trouvent dans $S. A dx + R + R'$, on ajoutera à cette intégrale le reste R'' , & l'intégrale exacte, en ne supposant que quatre variables, sera $= S. A dx + R + R' + R''$, à laquelle on ajoutera une constante; on continueroit de même s'il y avoit plus de quatre variables. On s'assurera qu'on ne s'est pas trompé en prenant la différentielle de l'intégrale trouvée, qui doit être égale à la différentielle proposée.

II. MÉTHODE. On prend d'abord l'intégrale $S. A dx$, comme on vient de le dire, on différencie $S. A dx$ en supposant y seul variable, on retranche cette différentielle du terme $B dy$, & s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste, dans la même supposition de y seul variable, & désignant cette intégrale par R , on l'ajoute à $S. A dx$ pour avoir $S. A dx + R$. On différencie ensuite $S. A dx + R$ dans la supposition de z seul variable, on ôte la différentielle du terme $C dz$, & s'il y a un reste, on en prend son intégrale R' , & l'ajoutant à la précédente, l'on a $S. A dx + R + R'$; on continue de même jusqu'au dernier terme, & l'on ajoute une constante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle dy . $L. x + \frac{y dx}{x} + \frac{bb dx}{bb + xx} = A dx + B dy$; en faisant $A = \frac{y}{x} + \frac{bb}{bb + xx}$, & $B = L.x$, on trouve que l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ a lieu; Ainsi la diffé-

rentielle est complète. En me servant de la première méthode, j'ai $S. A dx = y Lx + S. \frac{b b dx}{b b + x x} =$

$y L. x + m$, m étant un arc de cercle dont le rayon $= b$, & la tangente $= x$. L'intégrale $S. B dy$ prise dans la supposition de x constant, est $y L. x$, que je rejette par ce qu'elle se trouve dans $S. A dx$. Donc l'intégrale cherchée est $y L. x + m$, plus une constante. On trouve la même chose par la seconde méthode.

EXEMPLE II. Soit la différentielle
 $xy dx + xz dv + 3ay^2 z' dy - xy dz =$
 zz

$A dx + B dy + C dz$. En faisant $A = \frac{y}{z}$;

$B = \frac{x}{z} + 3ay^2$ & $C = -\frac{xy}{zz}$, l'on a les

équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = \frac{1}{z}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} =$

$-\frac{y}{zz}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy} = -\frac{x}{zz}$; donc la diffé-

rentielle est complète. Je me fers de la seconde

méthode. J'ai d'abord $S. A dx = \frac{xy}{z}$; différen-

tiant cette quantité en ne faisant varier que y , il

vient $\frac{x dy}{z}$ qu'on retranchera de $B dy$, ou de

$\frac{x dy}{z} + 3ay^2 dy$; il reste $3ay^2 dy$, dont

l'intégrale $= ay^3$, qu'on ajoute à la première in-

tégrale trouvée $S. A dx = \frac{xy}{z}$, la somme est

$\frac{x^2 y}{z} + ay$ (D), différentiant cette somme dans la supposition de z seul variable, on a $-x y z^{-2} dz = -\frac{x y dz}{z^2}$, que je retranche de $C dz$, & comme il ne reste rien, je ne puis pas en prendre l'intégrale pour l'ajouter à l'intégrale D; donc $\frac{x^2 y}{z} + ay$ est l'intégrale cherchée. On trouveroit la même intégrale par la première méthode.

EXEMPLE III. On propose la différentielle $az dx + 3xx dx + bz dy + 2cy dy + ax dz + by dz + u^2 dz + 2zu du + 3u^2 du = A dx + B dy + C dz + D du$. En faisant $az + 3x^2 = A$, $bz + 2cy = B$, $ax + by + u^2 = C$, $2zu + 3u^2 = D$,

L'on a les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = 0$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} = a$, $\frac{(dA)}{du} = \frac{(dD)}{dx} = 0$, $\frac{(dB)}{dz} =$

$\frac{(dC)}{dy} = b$, $\frac{(dB)}{du} = \frac{(dD)}{dy} = 0$, $\frac{(dC)}{du} = \frac{(dD)}{dz} = 2u$;

donc la différentielle proposée est exacte. Je me sers encore de la seconde méthode, & j'ai $S. A dx = azx + x^3$, dont la différentielle, en faisant varier y seul, est $= 0$. Retranchant 0 de $B dy$, il reste $B dy$, dont l'intégrale en supposant y seul variable, est $= bzy + cy^2$. L'ajoutant à la première intégrale qu'on vient de trouver, il vient $azx + x^3 + bzy + cy^2$. Différentiant cette quantité en ne faisant varier que z , l'on a $ax dz + by dz$;

cette quantité étant retranchée de Cdz , il restera $u^2 dz$, dont l'intégrale en considérant z seul comme variable, est $u^2 z$, qu'on ajoutera à la somme déjà trouvée pour avoir $axx + x^3 + bzy + cy^2 + uu z$. Différentiant cette somme en supposant u seul variable, il vient $2zu du$ qu'on retranchera de Ddu , il restera $3u du$ dont l'intégrale u^3 étant ajoutée à la seconde somme, donne l'intégrale cherchée $= axx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2 z + u^3$, à laquelle il faut supposer qu'on a ajouté une constante. On doit toujours supposer qu'on ajoute une constante à chaque intégrale ainsi que nous l'avons dit ailleurs. On trouveroit la même chose par la première méthode, & l'on pourra employer l'une ou l'autre selon qu'on le trouvera plus facile.

94. Dans la suite nous appellerons équation différentielle une formule différentielle égale à 0; Cependant nous la désignerons souvent par le mot d'équation. Lorsque la quantité qu'on différencie est égale à 0, la différenciation peut en faire disparaître quelque facteur mêlé de variables qui multiplie, ou qui divise tous les termes de l'équation différentielle. Par exemple, si on différencie la quantité $ax^2 - bx^2y + c$, l'on aura la différentielle $2ax dx - 2by x dx - bx^2 dy$. Mais si l'on suppose $ax^2 - bx^2y + c = 0$, l'on aura l'équation différentielle $2ax dx - 2by x dx - bx^2 dy = 0$, laquelle étant divisée par le facteur commun & variable x , se réduit à $2a dx - 2by dx - bx dy = 0$. De même en égalant à 0 la fonction différentielle

$$\frac{axy dx + by^2 dx - cxy^3 dy}{xx + yy}, \text{ \& divisant}$$

par le facteur $\frac{y}{xx + yy}$, l'on a l'équation différentielle $ax dx + by dx - cxy^2 dy = 0$. La formule $dz = zn dx - m du$, dans laquelle n & m sont des quantités constantes ou variables, étant égalée à 0, & divisée par $e^{s \cdot n dx}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, donnera $dz \cdot e^{-s \cdot n dx} = zn dx e^{-s \cdot n dx} - e^{-s \cdot n dx} \times m du$, dont l'intégrale est $ze^{-s \cdot n dx} - S. e^{-s \cdot n dx} \cdot m du = 0$; car en différenciant cette intégrale, multipliant ensuite par $e^{s \cdot n dx}$, on a la différentielle proposée. Nous n'avons pas ajouté de constante dans l'intégrale, le Lecteur doit y suppléer. Ainsi l'on a $z = e^{s \cdot n dx} \cdot S. e^{-s \cdot n dx} \cdot m du + C$, C étant une constante,

95. Il est évident qu'on peut par les méthodes du problème précédent intégrer une équation différentielle quelconque du premier ordre $A dx + B dy + C dz + D du + \&c. = 0$, lorsqu'elle fournit les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, &c. Mais si la différentielle $A dx + B dy + \&c.$ étant considérée comme n'étant pas $= 0$, ne donne pas ces équations, on ne doit pas conclure qu'elle n'est pas intégrable lorsqu'on la considère comme $= 0$: car (94) il pourroit se faire qu'elle eût perdu un facteur variable que

nous désignerons par P ; de sorte que si on retrouve ce facteur P , en multipliant l'équation différentielle par P , on lui donneroit la forme $P A d x + P B d y + P C d z + P C d u + \&c. = 0$, qu'elle avoit avant la division , ce qui la rendroit complete , & elle donneroit les équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, &c. * , qui sont nécessaires pour qu'elle soit complete. De même il peut se faire que l'équation différentielle $A d x + B d y = 0$ ne donne point l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, quoiqu'en la multipliant par un facteur convenable , il soit possible de la rendre intégrable. Soit $A d x + B d y = a x^{m-1} y^n d x + b x^m y^{n-1} d y = 0$, il est évident que cette équation différentielle ne donne pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Mais si on multiplie tous les termes par le facteur $\frac{1}{x^m y^n}$, elle donnera ensuite cette équation & sera par conséquent intégrable ; car on aura $a \frac{dx}{x} + \frac{b dy}{y} = 0$, ou $a L. x + b L. y = C$ (C est une constante) $= L. x^a y^b$,

* On doit faire attention que l'expression $\frac{d(PA)}{dy}$ signifie qu'on prend la différentielle du numérateur en faisant varier seulement la variable dont la différentielle se trouve au dénominateur , & qu'on divise ensuite la différentielle du numérateur par le dénominateur. Il en est de même pour les autres expressions de cette nature.

96. REMARQUE. Dès qu'on a trouvé un facteur P qui rend intégrable une équation différentielle, on peut en trouver une infinité d'autres PV qui auront la même propriété, en prenant pour V dans ces facteurs une fonction quelconque de l'intégrale $S.P(A dx + B dy)$. Dans l'exemple précédent, en faisant $V = x^a y^b$, le facteur $\frac{x^a y^b}{x^m y^n}$, aura cette propriété. Si l'on fait $V = x^{a'} y^{b'}$, le facteur $\frac{x^{a'} y^{b'}}{x^m y^n} = x^{a'-m} y^{b'-n}$ aura encore la même propriété; or l'on peut donner à a & b une infinité de valeurs successives; donc &c. de même on peut aussi prendre pour un autre facteur le produit de P par une constante arbitraire.

97. Soit l'équation différentielle $2a dx - 2by dx - bxdy = 0$, ou $A dx + B dy = 0$; en faisant $2a - 2by = A$ & $B = -bx$; donc l'on a $\frac{(dA)}{dy} = -2b$, & $\frac{(dB)}{dx} = -b$; ainsi la différentielle $A dx + B dy$ n'est pas exacte.

On ne doit pas conclure cependant qu'en multipliant l'équation différentielle proposée par un multiplicateur P , on ne puisse pas la rendre intégrable.

Ayant fait la multiplication par le facteur P , on aura $PA dx + PB dy = 0$, & en supposant que cette équation différentielle est complète, il viendra $\frac{(d.PA)}{dy} = \frac{(d.PB)}{dx}$, ou

$$\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$$

$= 0^*$, équation que j'appellerai (R), & qui fera d'une grande utilité pour déterminer P : car la difficulté est réduite à prendre pour P une fonction de x , & de y assez générale, avec des coefficients & des exposans indéterminés, pour que cette fonction fasse évanouir tous les termes homologues de l'équation qu'on vient de trouver, & fournisse des équations particulières pour déterminer les coefficients & les exposans indéterminés.

Prenons pour P dans l'équation différentielle proposée, la fonction $x^m y^n$, m & n étant des exposans indéterminés, nous aurons $\frac{(dP)}{dy} = n x^m y^{n-1}$, $\frac{(dP)}{dx} = m y^n x^{m-1}$, $\frac{P(dA)}{dy} = -2bx^m y^n$, & $\frac{B(dP)}{dx} = -bmy^n x^m$. Donc l'équation R deviendra $-2bx^m y^n - 2anx^m y^{n-1} - 2bnx^m y^n + bx^m y^n + bmy^n x^m = 0$, ou $bx^m y^n - 2bnx^m y^n + bmx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$. En égalant à 0 les termes homologues, on

* On peut donner à cette équation une autre forme plus simple : car en divisant les deux termes de l'équation proposée par le multiplicateur de dy , ce qui est toujours aisé, on aura $B=1$ & $dB=0$; donc en effaçant le troisième terme, substituant x , au lieu de B , & transposant, on trouvera

$$P \cdot \frac{(dA)}{dy} = \frac{(dP)}{dx} - \frac{A(dP)}{dy}.$$

on aura les équations $-b - 2bn + bm = 0$, & $2anx^m y^{n-1} = 0$. Donc $2an = 0$, ou $n = 0$. Ainsi l'équation $-b - 2bn + bm = 0$, devient $-b + bm = 0$, ou $b m = b$, ou $m = 1$. C'est pourquoi le facteur $P = x^m y^n$ est $= x y^0 = x$, & l'équation différentielle complète sera $2axdx - 2byxdx - bx^2dy = 0$. Et parce que 0 est la différentielle d'une constante C, (laquelle peut aussi être $= 0$), l'on aura en intégrant, $ax^2 - bx^2y = C$. Si l'on n'ajoute pas de constante, il faut toujours la supposer.

Si l'on avoit l'équation différentielle $bydx + cxdy = 0$, qui n'est pas complète, on trouveroit par un calcul semblable, que $P = x^m y^n = \frac{1}{xy}$, & l'équation différentielle complète feroit $\frac{bydx + cxdy}{xy} = 0$, ou $\frac{b dx}{x} + \frac{c dy}{y} = 0$, dont l'intégrale est $bL.x + cL.y = L.x^b y^c$.

98. Soit l'équation différentielle à trois variables $A dx + B dy + C dz = 0$, dans laquelle la fonction différentielle $A dx + B dy + C dz$ ne soit pas une différentielle complète, & qu'on veuille la rendre intégrable en la multipliant par un facteur P. Supposant la chose faite, la différentielle $PA dx + PB dy + PC dz$, sera complète; donc on aura les trois équations $\frac{(d.PA)}{dy} = \frac{(d.PB)}{dx}$, $\frac{(d.PA)}{dz} = \frac{(d.PC)}{dx}$,

$$\frac{(d.P.B)}{dz} = \frac{(d.P.C)}{dy}, \text{ ou les trois suivantes :}$$

$$\text{I. } \frac{A(dP)}{dy} + \frac{P(dA)}{dy} = \frac{B(dP)}{dx} + \frac{P(dB)}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{A(dP)}{dz} + \frac{P(dA)}{dz} = \frac{C(dP)}{dx} + \frac{P(dC)}{dx}$$

$$\text{III. } \frac{B(dP)}{dz} + \frac{P(dB)}{dz} = \frac{C(dP)}{dy} + \frac{P(dC)}{dy}$$

La première donne $\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{A dx} + \frac{P(dB)}{A dx} - \frac{P(dA)}{A dy}$. Par la troisième l'on a

$$\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{C dz} + \frac{P(dB)}{C dz} - \frac{P(dC)}{C dy}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\frac{(dP)}{dy}$, multipliant ensuite

par A & par C, l'on trouvera facilement l'équation $\frac{CB(dP)}{dx} + \frac{CP(dB)}{dx} - \frac{CP(dA)}{dy}$

$$= \frac{AB(dP)}{dz} + \frac{AP(dB)}{dz} - \frac{AP(dC)}{dy}.$$

La seconde équation donne $\frac{(dP)}{dx} = \frac{A(dP)}{C dz} + \frac{P(dA)}{C dz} - \frac{P(dC)}{C dx}$.

Substituant cette valeur de $\frac{(dP)}{dx}$

dans l'équation précédente, l'on trouve, après avoir retranché de part & d'autre la quantité

$$\frac{AB(dP)}{dz}, \text{ divisé le tout par P, \& transposé,}$$

$$\text{l'équation de condition } \frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0;$$

qui fait connoître la relation que les quantités A, B, C doivent avoir entr'elles, afin que la proposée soit intégrable; de manière que si cette équation n'a pas lieu; il n'y a aucun facteur qui puisse rendre la proposée intégrable. On voit par-là qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables, qu'il est impossible d'intégrer.

Ainsi étant proposée une équation différentielle à trois variables, on verra si elle est complète, c'est-à-dire, si elle donne les équations dont on a parlé ci-dessus (89), dans ce cas on l'intégrera par l'une des méthodes du problème précédent. Si elle ne les donne pas, on examinera si elle donne l'équation de condition dont on vient de parler. Si cette équation a lieu, on cherchera le facteur P par la méthode des indéterminés; c'est-à-dire en prenant pour P une fonction des variables x, y & z , avec des exposans & des coefficients indéterminés, comme on le dira bien-tôt. Si l'équation de condition n'a pas lieu, on abandonnera la proposée comme impossible.

REMARQUE. Si $C = 0$; c'est-à-dire, si la proposée ne contient que deux variables x & y , alors $dC = 0$: car on peut considérer 0 comme une constante; & l'équation de condition devient $0 = 0$, équation identique qui (1^{re} Partie Calcul, N°. 67) fait voir que c'est un théorème & non un problème; c'est-à-dire, qu'une équation différentielle

à deux variables peut toujours devenir intégrable par le moyen d'un facteur.

99. En général étant donnée une équation différentielle $A dx + B dy + C dz + D du$ &c. à tant de variables qu'on voudra, on examinera si elle est exacte, dans ce cas on l'intégrera par le dernier problème. Si elle n'est pas exacte, pour savoir si elle peut le devenir par la multiplication d'un facteur variable P , on supposera la chose faite, & que $PA dx + PB dy + PC dz + PD du$ &c. est une différentielle exacte. Il est évident, par ce qu'on vient de dire (98), que toutes les différentielles de trois termes, telles que $PA dx + PB dy + PC dz$, $PA dx + PD du$, $PB dy + PC dz + PD du$, &c. * qu'on peut former en prenant trois termes quelconques dans l'équation proposée, & les multipliant par P , seront des différentielles complètes pourvu qu'on regarde comme constantes toutes les variables dont les différences ne se trouvent pas dans les trois termes; donc on aura autant d'équations de condition semblables à celle dont on vient de parler (98), qu'il y a de manières de prendre les lettres A, B, C, D , &c. trois à trois.

* Le nombre de ces combinaisons pour un nombre m de lettres est égal au coefficient $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

du quatrième terme du binôme de Newton. Voyez ce que nous avons dit sur le binôme de Newton dans la première partie de cet ouvrage, & notre Traité des Combinaisons dans nos Institutions Mathématiques.

Si la proposée ne donne pas toutes ces équations, il n'y a aucun facteur qui la puisse rendre intégrable, & on doit l'abandonner. Si la proposée donne toutes les équations de condition, on cherchera P par la méthode dont nous parlerons dans la suite.

100. Il est inutile d'examiner si toutes les équations de condition telles que $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$, ont lieu; parce que quelques-unes de ces équations suivent nécessairement des autres. Soit l'équation différentielle à quatre variables $A dx + B dy + C dz + D du = 0$, qui par la combinaison des lettres A, B, C, D donne les quatre équations de condition suivantes.

La première $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A dB}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0$, qui vient de l'équation $A dx + B dy + C dz = 0$.

La seconde $\frac{B(dD)}{dx} - \frac{D(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{du} - \frac{B(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dy} - \frac{A(dD)}{dy} = 0$, qu'on tire de l'équation $A dx + B dy + D du = 0$.

La troisième $\frac{C(dD)}{dx} - \frac{D(dC)}{dx} + \frac{A(dC)}{du} - \frac{C(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dz} - \frac{A(dD)}{dz} = 0$, qui vient de l'équation $A dx + C dz + D du = 0$.

La

La quatrième $\frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{uu} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0$, que donne l'équation $B dy + C dz + D du = 0$.

Si l'on prend à volonté trois de ces équations de condition, la quatrième s'ensuivra nécessairement. Prenons, par exemple, les trois premières.

Si l'on prend dans la première la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, qu'on égale cette valeur à la valeur de la même quantité prise dans la seconde, qu'on multiplie le résultat par C & par D, qu'on transpose dans

le premier membre le terme $-\frac{C \cdot B \cdot dD}{dx}$, & qu'on mette dans le second membre tous les termes où

dx ne se trouve pas, il viendra $\frac{BC(dD)}{dx} -$

$\frac{BD(dC)}{dx} = \frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{C^2(dA)}{du}$

$-\frac{CA(dB)}{du} + \frac{DA(dB)}{dz} - \frac{DB(dA)}{dz}$. En mul-

tipliant par B la troisième équation de condition & transposant dans le second membre tous les

termes non affectés de dx , l'on trouve $\frac{BC(dD)}{dx} -$

$\frac{BD(dC)}{dx} = \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz}$

$-\frac{BD(dA)}{dz}$. Égalant les valeurs de $\frac{BC(dD)}{dx} -$

$\frac{BD(dC)}{dx}$, effaçant les quantités égales qui se

trouveront dans les deux membres de l'équation, divisant par A, transposant tous les termes dans le premier membre & les arrangeant, il

$$\text{viendra } \frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0, \text{ qui est la qua-}$$

trième équation de condition. Si l'on prenoit trois autres équations de condition, il en résulteroit également la quatrième. Ainsi pour savoir si une équation différentielle à quatre variables qu'on suppose n'être pas intégrable, peut le devenir en la multipliant par un facteur P, il suffira d'examiner trois des quatre équations de condition qu'elle donne. On peut prouver de même que de dix équations de condition que donne une équation différentielle à cinq variables il suffit d'en vérifier six; car les autres suivent toujours de celles-là. De vingt équations de condition que donne une équation différentielle à six variables, il suffit d'en examiner dix. Et en général le nombre des variables étant m , le nombre des équations de condition nécessaires est $\frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2}$.

101. Lorsqu'une équation différentielle à plusieurs variables donnera les équations de condition nécessaires, on prendra pour P une fonction générale composée de toutes les variables de la différentielle avec des exposans & des coefficients indéterminés, qu'on tâchera ensuite de déterminer par le

$$\text{moyen des équations } \frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}, \frac{(dPA)}{dz} =$$

$$\frac{(dPC)}{dx}, \&c. \text{ réduites aux équations } \frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}, \frac{P(dA)}{dz} + \frac{A(dP)}{dz} = \frac{P(dC)}{dx} + \frac{C(dP)}{dx}, \&c. \text{ Mais il n'est pas}$$

nécessaire d'employer toutes ces équations dont le nombre seroit celui des différentes manières dont les lettres A, B, C, D, &c. peuvent être prises deux à deux * ; il suffira d'en employer un nombre moindre d'une unité que celui des variables de l'équation différentielle proposée. En effet, si l'équation différentielle $A dx + B dy + C dz = 0$, est possible, elle donnera les

$$\text{trois équations } \frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}, \frac{(dPA)}{dz} =$$

$$\frac{(dPC)}{dx}, \frac{(dPB)}{dz} = \frac{(dPC)}{dy}, \& \text{ l'équation de con-}$$

$$\text{dition } \frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0; \text{ or}$$

(100), cette équation de condition suit des trois premières ; donc réciproquement une quelconque des trois premières suit des deux autres & de l'équation de condition. Ainsi si deux des trois

* Si le nombre des lettres est m , ces lettres peuvent être prises deux à deux un nombre de fois $\frac{m(m-1)}{2}$

Voyez dans la première partie de cet ouvrage, ce qu'on a dit sur le binome de Newton, & le Traité des Combinaisons de nos Institutions Mathématiques.

premières équations ont lieu, comme l'équation de condition est supposée avoir lieu, la troisième aura nécessairement lieu, & si P satisfait aux deux premières, P satisfera à la troisième. En général si le nombre des variables est m & que P satisfasse à $m - 1$ équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, &c., P satisfera à toutes les équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, &c. de manière qu'il suffit pour déterminer P, d'employer un nombre d'équations moindre d'une unité que celui des variables que renferme l'équation différentielle proposée.

102. Quant à la forme qu'on doit donner au facteur P, on ne connoit pas de méthode générale pour la trouver. Dans les cas particuliers on pourra essayer, comme nous avons fait ci-dessus (97); mais on réussira souvent par la méthode suivante. L'on prendra pour P une fraction $\frac{1}{M}$ dont le dénominateur soit une fonction positive sans diviseur variable, & d'un degré au-dessus des fonctions A, B, C, &c., & qui soit une fonction de toutes les variables qui se trouvent dans ces fonctions, avec des coefficients indéterminés. Cette règle est fondée sur les deux remarques suivantes qui dérivent de la nature du calcul différentiel : 1°. on a observé que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce facteur à leurs différentielles, d'où l'on peut conclure que dans le grand nombre de cas où

cette remarque a lieu, la différentielle $PA dx + PB dy + PC dz + \&c.$ qui a le facteur commun P à tous les termes, l'aura aussi à son intégrale que nous désignerons par V : car si P n'étoit pas un facteur commun à tous les termes de la fonction V , il ne seroit pas non plus un facteur commun à tous les termes de la différentielle $dV = PA dx + PB dy + \&c.$

2°. On a remarqué que si une fonction V a un dénominateur variable, la différentielle dV de cette fonction aura un dénominateur qui sera un multiple de celui de l'intégrale V . Ainsi si $V =$

$$\frac{ax}{y}, \text{ l'on aura } dV = \frac{aydx - axdy}{yy}, \text{ où l'on voit}$$

que le dénominateur yy de dV est multiple du dénominateur y de la fonction V . Donc si en supposant ces deux remarques, on met au lieu du

facteur P la quantité $\frac{m}{n}$, dans laquelle m & n

sont des fonctions positives des variables qui entrent dans une différentielle dV proposée; par la

• première remarque m sera un facteur commun

de la fonction V dont la différentielle $= \frac{m}{n} A dx$

$$+ \frac{m}{n} B dy + \frac{m}{n} C dz + \&c., \text{ \& par la}$$

seconde remarque n contiendra le dénominateur de la fonction V . Si l'on divise la différentielle dV

$$= \frac{m}{n} A dx + \&c. \text{ par son intégrale } V, m \text{ dis-}$$

paraîtra du numérateur, & n se divisera par le dénominateur de l'intégrale, de manière qu'il ne restera au dénominateur qu'une fonction M d'un

degré de plus que les fonctions $A, B, C, \&c.$ * ; car la quantité $\frac{A dx + B dy + C dz + \&c.}{M}$, qui résulte de cette division est $\frac{dV}{V}$, ou la différentielle du logarithme de V ; donc elle doit être d'un degré au-dessous de l'unité **. Mais $\frac{dV}{V} = d.L.V$ est la différentielle de $L.V$; donc le théorème ci dessus (91) a toujours lieu, & à la place de P l'on peut substituer $\frac{1}{M}$ dans les équations que donne le théorème, M étant une fonction positive la plus générale des variables qui entrent dans dV , & d'un degré d'une unité de plus que $A, B, C, D, \&c.$ avec des coefficients indéterminés; & s'il y a des radicaux dans $A, B, C, \&c.$ il faudra qu'ils entrent dans M en se combinant avec $x, y, z, \&c.$ de toutes les manières possibles.

Donc au lieu des équations $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}, \&c.$, en mettant la quantité $\frac{1}{M}$

* Si $V = \frac{ax}{y}$, l'on a $\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{y dx - x dy}{xy}$. Or ici les fonctions A & B sont évidemment du premier degré, & $xy = M$ est du second degré.

** On ne regarde pas les différentielles $dx, dy, \&c.$ comme augmentant le degré de la fonction; ainsi $x dx$ est une fonction du premier & non du second degré.

à la place de P , — $\frac{dM}{MM}$ à la place de dP , & multipliant le tout par MM , on aura les équations (N) $\frac{M(dA)}{ay'} = \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} = \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dB)}{dz} = \frac{B(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dy} = \frac{C(dM)}{dy}$; &c. On déterminera par ces équations les coefficients de M & par conséquent le facteur M lui-même. On intégrera ensuite la différentielle complète $\frac{dV}{V} = \frac{A dx + B dy + C dz + \&c.}{M}$ par quelque'une des méthodes du dernier problème.

103. Soit proposé d'intégrer l'équation $x dx + hy dx + mx dy + ny dy + p dy = 0^*$, ou $A dx + B dy = 0$, en faisant $A = x + hy$, & $B = mx + ny + p$. Puisque A & B sont des fonctions du premier degré de x & de y , il faut prendre pour M une fonction générale de x & de y de deux degrés avec des coefficients indéterminés $b, c, \&c.$, laquelle fonction devant être un facteur de l'équation proposée, peut être supposée $= 0$, & l'on peut délivrer son premier terme de coefficient. Supposons $M = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$; on aura par ces

* Si le terme $x dx$ avoit un multiplicateur constant; en divisant tout par ce multiplicateur, on lui donneroit la forme de l'équation différentielle proposée qui est la plus générale de son ordre; si un terme tel que $mx dy$, par exemple, manquoit, on feroit $m = 0$; &c.

suppositions $\frac{(dA)}{dy} = h, \frac{(dB)}{dx} = m, \frac{(dM)}{dy} = bx + 2cy + f, \frac{(dM)}{dx} = 2x + by + c$, Substituant

ces valeurs dans l'équation $\frac{M(dA)}{dy} - \frac{A'dM}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx} = 0^*$, on aura l'équation

$$\left. \begin{aligned} hx^2 + 2nxy + hc x + nb y^2 + ncy + hg \\ + m - 2e - f - me + bp - mg \\ - b + 2p - he - mf + pc \end{aligned} \right\} = 0. \text{ Si}$$

dans cette équation on fait chaque terme $= 0$, on aura six équations du premier degré, $h + m - b = 0, 2n - 2e = 0, hc - f + 2p = 0, nb - me - he = 0, nc + bp - mf = 0, hg - mg + pc = 0$, qui donneront les coeffi-

cients $b = h + m, c = \frac{ph - pm}{hm - n}, e = n;$

$f = \frac{ph^2 + phm - 2pn}{hm - n}, g = \frac{-p^2}{hm - n}$, qu'on

substituera dans la valeur de $M = xx + bxy + \&c.$,

substituant ensuite celle de M dans $\frac{Adx + Bdy}{M}$, on aura

$$\frac{(x + hy)dx + (mx + ny + p)dy}{x^2 + (m + h)xy + \left(\frac{ph - pm}{hm - n}\right)x + nyy + \left(\frac{phh + phm - 2pn}{hm - n}\right)y - \frac{p^2}{(hm - n)}}$$

* C'est la même que l'équation N (102), en transposant les termes.

$= \frac{A dx}{M} + \frac{B dy}{M}$. Pour intégrer l'on prendra selon le dernier problème, l'intégrale du premier terme $\frac{A dx}{M}$ en supposant x seul variable; pre-

nant ensuite l'intégrale de $\frac{B dy}{M}$ en regardant y seul comme variable, l'on suivra la première méthode du dernier problème. Or en faisant $hy = a$,

$$(m + h)y + \frac{ph - pm}{hm - n} = b', \quad ny^2 +$$

$$\left(\frac{phh + phm - 2pn}{hm - n} \right) y - \frac{p^2}{hm - n} = q, \text{ on}$$

aura $\frac{A dx}{M} = \frac{(x + a) dx}{xx + b'x + q}$. Les facteurs du dé-

nominator de cette fraction rationnelle sont x

$$+ \frac{1}{2}b' + \sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}, \quad x + \frac{1}{2}b' -$$

$$\sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}; \text{ \& supposant le premier } = x$$

$+ r$, & le second $= x + t$, la différentielle $\frac{A dx}{M}$ fera =

$$\left(\frac{x + a}{(x + r)(x + t)} \right) dx = \frac{r - a}{(r - t)(x + r)} \times dx + \frac{a - t}{(r - t)(x + t)} \times$$

dx , dont l'intégrale est $= \left(\frac{r - a}{r - t} \right) L.(x + r) +$

$$\left(\frac{a - t}{r - t} \right) . L.(x + t). \text{ Substituant dans cette in-}$$

tégrale les valeurs de r , a & t , & ensuite celles

$$\text{de } b' \text{ \& } q, \text{ on aura } \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}h}{\sqrt{(h+m)^2 - 4n}} \right) \times$$

$$L. \left[x + \left(\frac{h+m}{2} \right) y + \frac{p(h-m)}{2hm - 2n} + \frac{1}{2} (y -$$

$$\frac{P}{hm-n} \sqrt{(h+m)^2 - 4n} + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}h}{\sqrt{(h+m)^2 - 4n}} \right) \right) x$$

$$L. \left[x + \left(\frac{h+m}{2} \right) y + \frac{p(h-m)}{2hm-2n} - \frac{1}{2} \left(y - \frac{P}{hm-n} \sqrt{(h+m)^2 - 4n} \right) \right].$$

Cette quantité étant égale à une constante sera l'intégrale cherchée : car en différenciant on trouvera l'équation différentielle proposée ; ainsi il seroit inutile de prendre l'intégrale du terme $\frac{B dy}{M}$.

104. Les équations particulières font souvent connoître la forme du multiplicateur P cherché. Reprenons pour le faire voir l'équation générale de condition $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$. Supposons $dP = T dx + V dy$, T & V étant des fonctions de x & de y ; il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (88) que $\frac{(dP)}{dx} = T$, & $\frac{(dP)}{dy} = V$; donc en substituant, l'équation précédente devient $\frac{P(dA)}{dy} + AV = \frac{P(dB)}{dx} + BT$, ou $\frac{BT - AV}{P} = \frac{(dA)}{dy} - \frac{(dB)}{dx}$, équation que j'appelle (N) & qui suffit pour déterminer P dans les cas particuliers. Si l'on supposoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ce qui est le cas des équations différentielles complètes, l'on auroit $BT - AV = 0$, $T = 0$, $V = 0$, & $dP = T dx + V dy = 0$; donc alors P est l'unité ou une constante quelconque. Il est aisé de voir que

pour intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui n'est pas absurde, il suffit de satisfaire à l'équation N, ce qui est toujours possible, quoique l'on n'ait pas de méthode générale pour cela. Cela réussit, facilement lorsque l'une des variables ne passe pas le premier degré, comme nous le ferons bien-tôt voir. Il en est de même lorsque les équations sont *homogenes*, c'est-à-dire, lorsque chacun de leurs termes est de même degré par rapport aux variables.

Soit l'équation différentielle $p y^n dx + q y dx + r dy = 0$, telle que p , q & r soient des fonctions de x seul sans y , nous aurons $\frac{(dA)}{dy} =$

$n p y^{n-1} + q, \frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. En faisant comme ci-devant $dP = T dx + V dy$, l'équation N devient $\frac{rT - p y^n V - q y V}{P} = n p y^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$.

Soit $P = t y^m$, t étant une fonction de x sans y , on aura $T = \frac{y^m dt}{dx}$, & $V = m t y^{m-1}$. Substituant

ces valeurs, on trouve l'équation $\frac{r dt}{t dx} - m p y^{n-1} - m q =$

$n p y^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Pour faire usage de cette

équation il faut supposer $n = -m$, & l'on trouvera en divisant par r , multipliant par dx & effaçant les termes inutiles, $\frac{dt}{t} = \frac{(1-n) q dx}{r} - \frac{dr}{r}$; donc

en intégrant, L. $t =$ S. $\frac{(1-n) q dx}{r} -$ L. $r =$

S. $\frac{(1-n) q dx}{r}$. L. $c -$ L. r , (c étant le nombre

dont le logarithme hyperbolique $\equiv 1$). Donc $t \equiv \frac{1}{r} c^{(1-n)} \cdot S. \frac{a dx}{r}$; & puisque $n \equiv -m$, il est visible que $P \equiv t y^m$ sera $\equiv \frac{y^{1-n}}{r} c^{(1-n)} S. \frac{q dx}{r}$. Multipliant la proposée par ce facteur & intégrant, l'on aura $\frac{y^{1-n}}{1-n} c^{(1-n)} S. \frac{q dx}{r} + S. \left(\frac{p dx}{r} \times c^{(1-n)} S. \frac{q dx}{r} \right) \equiv C$. L'intégrale $S. \frac{q dx}{r}$ ne suppose que les méthodes qu'on a déjà données pour intégrer les différentielles à une seule variable; de sorte qu'il est aisé d'avoir cette intégrale.

La méthode dont on vient de faire usage réussit facilement lorsque l'une des variables ne monte qu'au premier degré. Car si l'on suppose $n \equiv 0$, l'on aura $-m \equiv 0$, & par conséquent $+m \equiv 0$; donc dans ce cas le facteur P sera $\equiv t y^0 \equiv 1$; c'est à-dire une fonction de x sans y & la proposée deviendra $p dx + q y dx + r dy \equiv 0$; donc l'intégrale sera $y c^{S. \frac{q dx}{r}} + S. \left(\frac{p dx}{r} \cdot c^{S. \frac{q dx}{r}} \right) \equiv C$. Si $n \equiv 1$, l'on aura $1-n \equiv 0$, & la proposée sera $p y dx + q y dx + r dx \equiv 0$, & le facteur $P \equiv \frac{1}{r y}$. Multipliant l'équation différentielle précédente par ce facteur, on la réduira à cette forme $\frac{p dx + q dx}{r} + \frac{dy}{y} \equiv 0$, dont l'intégrale $\equiv S. \frac{(p + q) dx}{r} + L. y \equiv C$.

105. On peut quelquefois simplifier les méthodes précédentes en partageant la proposée en plusieurs parties intégrables séparément. Soit, par exemple, l'équation $p y^q dy + p' y^{q+r} dx + p'' y^r dx = 0$, dans laquelle p, p', p'' sont des fonctions de x , q & r des exposans quelconques. On essayera le facteur $P y^n$, P étant une fonction de x sans y , & n un exposant indéterminé. Et pour plus de facilité on fera $n = -r$, de manière que ce facteur devienne $P y^{-r}$; il est aisé de voir qu'il suffira de diviser la proposée par y^r & de regarder P comme le facteur. Divisant de plus par p & faisant $\frac{p'}{p} = t$, $\frac{p''}{p} = t'$, & multipliant par P , la proposée devient $P y^{q-r} dy + P t y^{q-r+r} dx + P t' dx = 0$. Mais P étant une fonction de x , $P t'$ le sera aussi, & $\int P t' dx$ se réduit à l'intégrale d'une différentielle à une seule variable.

La difficulté se réduit donc à rendre complète la différentielle $P y^{q-r} dy + t P y^{q-r+r} dx$; or cette différentielle sera complète si $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(P t y^{q-r+r})}{dy}$, ou si $y^{q-r} \frac{dP}{dx} = (q-r+1) y^{q-r} t P$, ou si $\frac{dP}{P} = (q-r+1) t dx$; donc en intégrant, $\int \frac{dP}{P} = \int (q-r+1) t dx$, L. $P = S. (q-r+1) t dx = S. (q-r+1) t dx$. L. c; donc $P = e^{S. (q-r+1) t dx}$. Donc en substituant cette valeur de P dans l'équa-

équation différentielle réduite, & intégrant *, on aura $\left(\frac{y^{q-r+s}}{q-r+1}\right).c^{s.(q-r+s).t}dx + c^{s.(q-r+s).t}dx \times S.t' dx = C.$

Soit maintenant les deux équations $dx + ady + (bx + cy) T dt = 0$, $fdx + a'dy + (b'x + c'y) t dT = 0$, T étant une fonction de la variable t ; je multiplie l'une de ces équations différentielles, par exemple, la première par une quantité constante, mais indéterminée g ; l'ajoutant ensuite à la seconde, je multiplie le résultat par P que je suppose une fonction de t , on trouvera l'équation $(gP + fP).dx + (gaP + a'P).dy + ((gbP + b'P).x + (gcP + c'P).y) \times T dt = 0$ (A). Si l'on suppose maintenant que cette équation est complète, on aura les équations suivantes.

$$\text{I. } \frac{d(gP + fP)}{dt} = \frac{d((gbP + b'P).x + (gcP + c'P).y)}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d((gbP + b'P).x + (gcP + c'P).y)}{dy}$$

$$\text{III. } \frac{d(gP + fP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}.$$

* On intégrera les deux premiers termes comme s'il n'y en avoit pas d'autre; on peut intégrer le troisième par la méthode des différentielles à une seule variable.

t étant regardé comme constant dans la troisième équation, & P étant une fonction de t , il est évident que les deux membres de cette équation sont égaux à 0, c'est-à-dire, que la dernière équation devient $0 = 0$. La première équation donne $\frac{dP.(g+f)}{dt} = P.(gb + b')$, la seconde donne

$$\frac{dP.(ga + a')}{dt} = (gc + c')P. \text{ Donc } \frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g+f} dt, \text{ \& } \frac{dP}{P} = \frac{gc + c'}{ga + a'} dt. \text{ En égalant}$$

ces valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divisant par dt , l'on a

$$\frac{gb + b'}{g+f} = \frac{gc + c'}{ga + a'}, \text{ équation du second}$$

degré qui en ôtant les fractions, & considérant g comme l'inconnue, fera connoître g ; g étant connu,

on connoitra P : car de l'équation $\frac{dP}{P} =$

$$\frac{gb + b'}{g+f} dt, \text{ l'on tire en intégrant, L. } P =$$

$$\frac{gb + b'}{g+f} . t \text{ L. } c, \text{ ou } P = c \left(\frac{gb + b'}{cg + f} \right)^t. \text{ Donc}$$

l'équation A est complete & son intégrale est =

$$(gP + fP).x + (gaP + a'P)y = C, \text{ en}$$

supposant que g désigne une valeur de g trouvée

par l'équation du second degré dont on vient de

parler. On auroit de même l'intégrale par l'autre

valeur de g , il n'y auroit qu'à supposer g égal

à cette nouvelle valeur g' , & au lieu de la const-

tante C écrire C' dans l'intégrale qu'on vient de

trouver. Au moyen de ces deux intégrales, on

éliminera facilement l'une des inconnues x ou y .

Supposons qu'on ait éliminé x , on aura une équation en y & t , qui fera connoître la valeur de y en t ; substituant ensuite cette valeur dans la première ou la seconde intégrale, on aura la valeur de x en t .

106. REMARQUE. Il est quelquefois très-commode, de partager une équation différentielle en plusieurs parties, & d'examiner si on peut les rendre complètes séparément par un facteur commun : car alors l'intégration pourra devenir fort aisée. Soit l'équation différentielle $aydx + bxdy + cx^{m-1}y^pdx + gx^{n-1}y^qdy = 0$, je la partage en deux parties $aydx + bxdy$, $cx^{m-1}y^pdx + gx^{n-1}y^qdy$. Si l'on multiplie la première partie par $x^{a-1}y^{b-1}$ elle devient $a y^b x^{a-1} dx + b x^a y^{b-1} dy$ dont l'intégrale $= \frac{1}{n} x^a y^b$. La seconde partie devient intégrable en la multipliant par le facteur $x^{c-m-1}y^{q-p-1}$. Maintenant pour trouver un facteur commun, je fais $an-1 = cm-u$, $bn-1 = gm-p$; donc $n = \frac{cm-u+1}{a} = \frac{gm-p+1}{b}$; donc $m = \frac{ap-bu-a+b}{ag-bc}$, & par conséquent $n = \frac{cp-gu-c+g}{ag-bc}$. Substituant ces valeurs de m & de n dans les facteurs ci-dessus, ils deviendront égaux, & l'on aura un facteur commun qui rendra l'équation complète, & son intégrale sera $\frac{1}{n} x^a y^b + \frac{1}{m} x^c y^g = C$. Au reste une équation différentielle totale multipliée par un facteur devient souvent complète quoiqu'aucune de ses parties ne puisse être complétée séparément.

* n & m sont des quantités indéterminées.

107. Il est plus facile de trouver les conditions que doit avoir une équation pour pouvoir devenir complète par le moyen d'un facteur donné, que de trouver généralement le facteur qui doit rendre complète une équation différentielle d'un ordre donné lorsque cela est possible. Pour donner une idée de la méthode qu'on peut suivre dans certains cas nous allons résoudre le problème suivant.

108. PROBLEME. p, q, r, t étant supposés des fonctions de x , déterminer ces fonctions de manière que l'équation $dy + yydx + tdx = 0$ devienne complète en la multipliant par

un facteur $P = \frac{1}{pyy + qy + r}$. L'on aura l'équation

$$\frac{d(PA)}{dy} = \frac{d(PB)}{dx}, \text{ ou en substituant les valeurs de}$$

$$P \text{ \& de } A, \frac{1}{dy} d. \left(\frac{yy + t}{pyy + qy + r} \right) = \frac{t}{dx} d. \frac{1}{pyy + qy + r},$$

on prend la différentielle du premier membre en faisant varier y seul, & celle du second en regardant x seul comme variable. Donc $2y (pyy + qy + r) -$

$$(yy + t). (2py + q) = \frac{-yydp - ydq - dr}{dx}. \text{ Trans-}$$

posant, ôtant la fraction, réduisant & ordonnant par rapport à y , il vient,

$$\left. \begin{aligned} qyydx + 2rydx - qtdx \\ + yydp - 2ptydx + dr \\ + ydq \end{aligned} \right\} = 0. \text{ Supposons main-}$$

tenant que p, q, r & t sont tels que les co-efficients de chaque puissance de y soient $= 0$, l'on aura $qyydx +$

$$yydp = 0, \text{ ou } q = -\frac{dp}{dx}. \text{ L'on aura aussi } -qtdx +$$

$$dr = 0, \text{ ou } q = \frac{dr}{tdx} = -\frac{dp}{dx}, \text{ ou } dp = -\frac{dr}{t},$$

$$\text{ \& } t = -\frac{dr}{dp}. \text{ L'équation } q = -\frac{dp}{dx} \text{ donne } dq = -\frac{ddp}{dx},$$

en supposant dx constant. Substituant la valeur de dq & celle de t dans l'équation $2r dx - 2ptydx + dq = 0$,

que donne la seconde colonne de l'équation ci-dessus, il vient $2 r dx + \frac{2 p dr dx}{dp} - \frac{d dp}{dx} = 0$, ou $r dp + p dr = \frac{dp \cdot d dp}{2 dx^2}$. L'intégrale du premier membre est rp , & il est facile de voir que celle du second est $= \frac{dp^2}{4 dx^2} + C$, comme on le trouvera en revenant de l'intégrale à la différentielle ; donc l'on a $rp = \frac{dp^2}{4 dx^2} + C$ ou $r = \frac{dp^2}{4 p dx^2} + \frac{C}{p}$, $q = -\frac{dp}{dx}$, $t = -\frac{dr}{dp} = \frac{C}{p^2} + \frac{dp}{4 p^2 dx^2} - \frac{d dp}{2 p dx^2}$. Supposons maintenant $p = uu$, u étant une fonction quelconque de x , nous aurons $p = uu$; $q = -\frac{2u du}{dx}$; $r = \frac{C}{u^2} + \frac{du^2}{dx^2}$; $t = \frac{C}{u^4} - \frac{d du}{u \cdot dx^2}$. Ces valeurs étant substituées dans la proposée au lieu de p, q, r, t , l'équation $\frac{dy + yy dx + t dx}{p yy + qy + r} = 0$ sera complète.

DE CE QU'ON PEUT FAIRE LORSQU'IL Y A TROP DE DIFFICULTÉ POUR TROUVER LE FACTEUR QUI DOIT RENDRE COMPLETE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

109. On peut chercher la relation qu'il y a entre les variables de l'équation proposée. Si, par exemple, cette équation ne contient que deux variables x & y , on cherchera une valeur de y en x , par exemple, qui soit telle qu'elle rende l'équation $= 0$: Ce qui peut s'appeler aussi résoudre l'équation, ou intégrer l'équation.

110. Soit proposé d'intégrer l'équation différentielle à deux variables $A dx^m + B dy^n + C dx^p dy^q + \dots + D dx^r y^s + \dots = 0$, qui contient les différentielles

dx & dy élevées à des exposans dont la somme dans chaque terme est m , les co-efficiens $A, B, \&c.$ étant des fonctions de x , ou simplement des constantes. Je suppose $\frac{dy}{dx} = z$, ou $dy = z dx$. Substituant cette valeur de dy dans l'équation proposée, elle devient $A dx^m + B z^m dx^m + C z^{m-n} dx^m + D z^{m-p} dx^m + \&c. = 0$. ou en divisant par dx^m , $A + B z^m + C z^{m-n} + D z^{m-p} + \&c. = 0$, équation à deux variables z & x . On trouvera donc par cette équation la valeur de z en x & constantes. Substituant cette valeur dans $z dx$, on aura une différentielle à une seule variable dont l'intégrale sera $= y$, puisque $dy = z dx$.

Soit l'équation $A dx^2 + B dy^2 + C dx dy = 0$, on aura dans l'équation générale, $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, & en faisant $dy = z dx$, substituant cette valeur & divisant ensuite par dx^2 , on trouvera $A + B z^2 + C z = 0$, ou $z^2 + \frac{Cz}{B} = -\frac{A}{B}$. Résolvant cette équation par

$$\frac{-C \pm \sqrt{CC - 4AB}}{2B}, \quad dy = z dx = \frac{-C dx \pm dx \sqrt{CC - 4AB}}{2B}, \quad y = S. \frac{-C dx}{2B} \pm S. \frac{dx \sqrt{CC - 4AB}}{2B} + E \text{ constante. Supposons}$$

$$A = b, C = a, B = \frac{x}{2}, \text{ l'on aura } dy = -\frac{a dx}{x} \pm \frac{dx}{x} \sqrt{aa - 2bx}, \text{ \& int\&egrant en ajoutant la constante } E, y = E - a L. x \pm S. \frac{dx}{x} \cdot \sqrt{aa - 2bx}. \text{ Or}$$

$$S. \frac{dx}{x} \sqrt{aa - 2bx} = 2 \sqrt{aa - 2bx} + a L. \frac{\sqrt{aa - 2bx} - a}{\sqrt{aa - 2bx} + a} \text{ Il est donc facile d'avoir la}$$

valeur de y qui est double, comme il est ais\&e de le voir.

DE LA MÉTHODE DE M. NEWTON D'INTÉGRER
PAR LES SÉRIES , LES ÉQUATIONS DIFFÉREN-
TIELLES QUI CONTIENNENT PLUSIEURS VARIA-
BLES DANS LEURS TERMES AVEC LES DIFFÉ-
RENCES DE CES VARIABLES ÉLEVÉES A DES
PUISSANCES QUELCONQUES.

III. La méthode dont il s'agit ici se trouve dans le *Traité de la Méthode des Fluxions & des Séries infinies* : Elle suppose la théorie des suites , & ceux qui ont lu la première partie de cet ouvrage , sont très en état de la comprendre. Si l'équation différentielle contient quelque fraction rationnelle ou irrationnelle , dont le dénominateur soit complexe , il faut la réduire en suites ou séries infinies par la formule du binome , ou par la division. S'il y a des radicaux qui renferment des quantités complexes , on les réduira en séries par la formule du binome de Newton. Si l'on a besoin de trouver les racines d'une équation affectée , c'est-à-dire qui contient deux variables , comme si on demandoit la racine y de l'équation $y^3 + a^2 y + a x y - x^3 + 2 a^3$, qui donne $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \&c$, on trouvera ces sortes de racines par des séries , & cela en employant les méthodes de la première partie de cet ouvrage.

Lorsque l'équation différentielle contient deux variables , il faut mettre d'un côté le rapport $\frac{dy}{dx}$ & de l'autre la valeur de ce rapport exprimé par une suite finie ou infinie.

Soit l'équation $dy^3 + a x dx^2 dy + a^2 dx^2 dy - x^3 dx^3 + 2 a^3 dx^3 = 0$, divisant tout par dx^3 & faisant $\frac{dy}{dx} = z$, il vient $z^3 + a x z + a a z - x^3 + 2 a^3$. Prenant la racine z de cette équation affectée , on trouve

$$z = \frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \&c. *$$

Dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, nous appellerons *quantités relatives* dy & la variable y dont la différentielle est au numérateur, & *quantités corrélatives* dx , & x , dont la différentielle se trouve au dénominateur. Mais dans la fraction $\frac{dx}{dy}$, x & dx seront les quantités relatives, y & dy les quantités corrélatives.

112. Soit maintenant l'équation $dx - dy + 3x dx + y dx + x^2 dx + xy dx = 0$. Pour la disposer comme on vient de le dire (111), je divise tout par dx & j'ai en transposant $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$. L'équation étant ainsi préparée, 1°. On disposera les termes suivant les dimensions des variables x & y , mettant en premier lieu ceux qui ne sont pas affectés de la variable relative & ensuite ceux où cette variable se trouve, en commençant toujours par ceux dont les dimensions sont les plus petites. Ainsi dans l'exemple proposé, on écrira $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$.

2°. Ayant décrit un rectangle $ABDC$ (Fig. 12) & l'ayant divisé comme on le voit, écrivez dans le rectangle horizontal $KBFR$ la suite des termes où la variable relative ne se trouve pas. C'est ici $1 - 3x + x^2$; écrivez aussi de haut en bas dans le rectangle vertical $ERSP$, l'autre suite de termes $+y + xy$ où se trouve la variable relative.

* Voyez ce qu'on a dit sur les suites, Première Partie, Courbes Algébriques, N°. 42 & suivants. Si l'on résout l'équation du troisième degré, en regardant z comme l'inconnue, on pourra réduire en série la valeur de z qui contiendra les radicaux de la formule de Cardan.

3°. Prenez le premier terme 1 de la suite horizontale, multipliez-le par la variable x corrélatrice & divisez le produit par l'exposant de la corrélatrice dans le même produit: ici on divisera par 1. Ecrivez le résultat x dans le rectangle horizontal NHDM, à côté de y ; vous aurez le premier terme de la série qui doit exprimer la valeur de la variable relative y .

4°. Pour avoir le second terme de cette série, substituez dans tous les termes de la série verticale $y + xy$ placée dans le rectangle ERSP, le premier terme que vous venez de trouver au lieu de la variable relative, & écrivez la valeur de chaque terme du résultat dans le rectangle RSQF à côté du terme qui l'a donné, & dans le rang qui convient à la dimension de la variable corrélatrice dans cette valeur. Dans notre exemple le résultat sera $x + xx$, on écrira $+x$ à côté de y au second rang sous le terme $-3x$ de même dimension, & le terme $+xx$ à côté de xy sous le terme $+xx$ de même dimension de la suite horizontale $1 - 3x + xx$. Prenez ensuite dans le rectangle KSQB, la somme des termes dans lesquels la variable corrélatrice a la plus petite dimension après le plus bas terme de la suite horizontale qui est ici $= 1$: cette somme sera dans notre exemple $-3x + x = -2x$, comme on le voit au second rang dans le rectangle des sommes SNMQ. Multipliez cette somme par la variable corrélatrice, & ayant divisé le résultat par l'exposant de la corrélatrice dans ce même résultat, écrivez le quotient dans le rectangle NHDM pour le second terme de la série qui doit exprimer la valeur de y . Dans notre exemple on multipliera $-2x$ par x & divisant le produit $-2x^2$ par l'exposant 2 de x , l'on écrira $-xx$ pour le second terme de la série cherchée.

5°. On substituera dans la série $y + xy$, le second terme $-x^2$ de la série au lieu de la variable y , & on écrira la valeur de chaque terme du résultat à côté de leur correspondant & dans le rectangle RSQF, & au rang qui convient à la dimension de la variable corrélatrice. Dans notre exemple en substituant $-x^2$ dans la série $y + xy$, l'on aura les termes $-x^2$, & $-x^3$; on écrira

— x^2 à côté de y sous le terme $+ x^2$ de même dimension dans la suite horizontale $1 - 3x + xx$, & le terme — x^3 à côté de xy , & au quatrième rang. Ensuite l'on prendra dans le rectangle KSQB la somme des termes dans lesquels la variable corrélatrice a la plus petite dimension après ceux dont on a pris la somme dans l'opération précédente; c'est-à-dire, quand on a voulu trouver le second terme de la série. Cette somme est ici $xx - xx + xx = xx$. On la multipliera par la variable corrélatrice x & l'on divisera le produit x^3 par l'exposant 3 de x dans le même produit, l'on écrira le résultat $\frac{1}{3} x^3$ dans le rectangle NHD M pour le troisième terme de la série cherchée. En opérant de même on trouvera le quatrième terme — $\frac{1}{6} x^4$; & ainsi de suite, & l'on aura $y = x - xx + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{120} x^5 - \&c.$

Voici la raison de ce procédé: puisque $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + x^2 + y + xy$, l'on a $dy = dx + 3x dx + x^2 dx + y dx + xy dx$, & en intégrant il vient $y = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \int y dx + \int xy dx$, d'où l'on voit que x est le premier terme de la série qu'on cherche, & qu'on trouve ce terme en opérant comme nous l'avons fait. Si l'on suppose maintenant que la série qu'on cherche est trouvée, & qu'elle soit représentée par $x + p$, p étant la somme de tous les termes qui suivent le premier; en substituant $x + p$ au lieu de y dans les termes $+ y$, $+ xy$, l'on aura $y + xy = x + xx + p + xp$, & l'équation $dy = dx - 3x + xx dx + (y + xy) dx$ deviendra (A) $dy = dx - 3x dx + xx dx + (p + xp) dx + x dx + x dx$, & en intégrant il viendra $y = x - xx + \frac{2}{3} x^3 + \int (p + xp) dx$. Ce qui fait voir que le second terme de la série cherchée est — xx , tel que le donne la méthode de Newton.

Supposant de même que p' désigne tous les termes de la série qui suivent le second, l'on aura $y = x - xx + p' = x + p$; donc $p = -xx + p'$, & en substituant — $xx + p'$ au lieu de p dans les deux termes $p + xp$, &

réduisant, l'équation A deviendra $dy = dx - 2x dx + x^2 dx - x^3 dx + (p' + xp') dx$, & en intégrant l'on trouve $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + S.(p' + xp') dx$; ce qui fait voir que le troisième terme de la série cherchée est $= \frac{1}{3}x^3$, ainsi que le donne notre opération. De même en supposant $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + p''$, l'on trouvera que le quatrième terme est $= \frac{1}{6}x^4$, & ainsi des autres termes. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que par la nature des opérations que prescrit la méthode, on doit trouver le même résultat que par la méthode analytique dont nous venons de parler.

113. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. à l'infini, on écrirait le terme 1 dans le rectangle horizontal K R F B (Fig. 13) & l'on écrirait les autres termes dans le rectangle vertical E R S P. Multipliant 1 par x & divisant le produit x par l'exposant 1 de x , dans ce même produit, on écrira le quotient x dans le rectangle N H D M, pour le premier terme de la suite qui doit exprimer la valeur de y . On substituera le premier terme x qu'on vient de trouver, au lieu de y dans les termes du rectangle vertical E R S P, écrivant la valeur de chaque terme à côté du terme correspondant dans le rectangle R S Q F, au rang qui convient à la dimension de la corrélatrice dans la valeur de ce terme. Pour trouver le second terme de la série, on multipliera $\frac{x}{a}$ par x & divisant le produit $\frac{x^2}{a}$ par l'exposant 2, on écrira le quotient $\frac{xx}{2a}$ à côté du premier terme de la série, & continuant d'opérer en substituant $\frac{xx}{2a}$ au lieu de y dans les termes du rectangle E R S P, écrivant les résultats ainsi qu'on le voit dans le rectangle R F Q S, prenant la somme des termes du troisième rang,

qui est $+\frac{x x}{2 a a} + \frac{x x}{a a} = \frac{3 x x}{2 a a}$, on la multipliera par x , & divisant la produit $\frac{3 x^3}{2 a a}$ par l'exposant 3, le quotient $\frac{x^3}{2 a a}$ sera le troisième terme de la suite cherchée; & en continuant de même, on aura $y = x + \frac{x x}{2 a} + \frac{x^3}{2 a a} + \frac{x^4}{2 a a^3} + \frac{x^5}{2 a^4} + \frac{x^6}{2 a^5}$ &c.

Dans cet exemple on ne s'est proposé de pousser la série que jusqu'à la sixième dimension de x , & c'est pour cela qu'on a omis dans l'opération tous les termes qu'on prévoyoit devoir être inutiles pour cette fin, comme on l'a indiqué par le signe &c. qu'on a ajouté à toutes les séries interrompues.

114. Lorsque la variable relative a des exposans fractionnaires, on peut faire disparaître ces exposans par la méthode du n°. 55. Si l'équation proposée étoit $\frac{dy}{dx} = 3 x y^{\frac{2}{3}} + y$, la progression arithmétique dans laquelle se trouvent les exposans de y seroit $\div 0. \frac{1}{3}. \frac{2}{3}. 1$, prenant le terme qui approche le plus de 0*, je fais $u = y^{\frac{1}{3}}$, ou $y = u^3$; donc $dy = 3 u u du$. Substituant ces valeurs de y & de dy dans la proposée, elle devient $\frac{3 u u du}{dx} = 3 x u u + u^3$, & en divisant par $3 u u$, l'on a $\frac{du}{dx} = x + \frac{1}{3} u$, & cherchant la valeur de la relative u , par la méthode de Newton, l'on trouvera la série $u =$

* En général si le terme le plus approchant de 0 est $\frac{p}{q}$, on fera $y^{\frac{p}{q}} = u^p$, ou $y^p = u^{p q}$.

$$\frac{1}{2} x x + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240} \text{ \&c. mais } u = y^{\frac{1}{3}} ;$$

$$\text{donc } y = u^3 = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \text{\&c.} \right)^3 = \frac{1}{8} x^6 +$$

$$\frac{1}{24} x^7 + \frac{7}{864} x^8 \text{ \&c.}$$

A l'égard des exposans fractionnaires de la quantité corrélatrice x , on les disposera selon leurs dimensions.

Par exemple si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + y + y^2$

$+ x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}$, on la disposeroit ainsi $\frac{dy}{dx} = 1 +$

$x^{\frac{2}{3}} + x + x^{\frac{5}{3}} + y + y^2$, & l'on opéreroit à l'ordinaire.

Soit l'équation $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy} = 2y^{\frac{1}{2}} +$

$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. Supposant $y^{\frac{1}{2}} = u$, l'on aura $uu = y$, $dy =$

$2u du$, & l'équation proposée deviendra $\frac{2u du}{dx} = 2u +$

$x^{\frac{1}{2}}u$, ou $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$; donc $du = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$,

& en intégrant, $u = y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}$, & en quarrant de

part & d'autre, $y = xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$. Mais parce qu'on

peut ajouter une constante à l'intégrale, l'on a $u = y^{\frac{1}{2}} =$

$C + x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}$, & en quarrant, $y = C^2 + 2Cx +$

$\frac{2}{3} Cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, série bien différente de la

première & qui ne peut lui devenir égale que lorsque $C = 0$.

De même, dans l'exemple ci-dessus, où nous avons trouvé $y = u^3 = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \text{\&c.} \right)^3$, le résultat

sera bien bien différent si l'on ajoute la constante C à la valeur de u , pour avoir $u = \left(C + \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \&c. \right)$,

alors on aura $y = \left(C + \frac{1}{2} x x + \frac{x^3}{18} + \&c. \right)^3$, sé-

rie qu'on variera à l'infini en donnant différentes valeurs à C . Il faut avoir l'attention d'ajouter une constante lorsqu'on a trouvé la valeur de la relative u , avant de prendre ensuite celle de y . Mais si y ne contenoit aucun exposant fractionnaire, alors on ajouteroit la constante C à la série qui exprime la valeur de y ; car si l'on

a l'équation $\frac{dy}{dx} = u$, u désignant une suite de termes composés de x , y & constantes, l'on aura $dy = u dx$, & $y = C + S. u dx$, en ajoutant la constante C .

115. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = y + a y^2 + x y^3$,

comme il n'y a aucun terme qui ne soit affecté de y , l'on n'en peut mettre aucun dans le rectangle horizontal $K R F B$. Dans ce cas l'on prendra pour le premier terme de la série, une constante arbitraire, autrement l'on ne pourroit avoir le premier terme de la racine.

De plus, on peut prendre même dans les autres cas, pour le premier terme de la série cherchée, telle quantité constante qu'on voudra, substituer ensuite cette constante au lieu de la relative dans les termes du rectangle vertical $E R S P$, & continuer l'opération à l'ordinaire, pour trouver les autres termes de la série cherchée.

Ainsi dans l'équation ci-dessus $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + x^2 +$

$y + x y$, si l'on prend (Fig. 14), 1 pour le premier terme de la série, en substituant 1 au lieu de y dans les termes $+ y$, $+ x y$, l'on aura $+ 1 + x$. On écrira 1 à côté de y sous le terme 1 de la série horizontale $1 - 3x + x^2$, & $+ x$ à côté de $x y$, sous le terme $- 3x$; ensuite on prendra la somme $+ 1 + 1 = 2$ des plus bas termes, & multipliant cette somme par la correlative x , l'on divisera le produit $2x$ par l'exposant de x dans ce produit, & l'on écrira le résultat $+ 2x$

dans le rectangle N H D M pour le second terme de la série, & en continuant les opérations à l'ordinaire, l'on aura $y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c. Si au lieu de prendre 1 pour premier terme l'on eût pris a , l'on auroit trouvé une série différente.

Cela prouve qu'en général il y a une infinité de valeurs différentes de y qui peuvent résoudre une équation à deux variables, & en effet une telle équation exprime un problème indéterminé, & ces sortes de problèmes ont une infinité de solutions.

116. Si dans l'équation $\frac{dy}{dx} = p$, la suite p contient quelque terme qui ait pour dénominateur quelque puissance de l'une des variables, on réduira ce terme en une série infinie, en substituant, au lieu de cette variable, une autre variable plus ou moins une constante arbitraire. Par exemple, si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 3y - 2x + \frac{x}{y}$, l'on pourroit faire $y = z \pm c$, & le terme $\frac{x}{y}$ seroit $= x.(z \pm c)^{-1}$. Supposons qu'on fasse $y = 1 + z$, on élèvera $1 + z$ à la puissance -1 par le binôme de Newton, & l'on multipliera tous les termes de la série résultante par x , de plus, on substituera $1 + z$ au lieu de y dans le terme $3y$. Si l'on avoit fait $y = a - z$, l'on auroit eu $dy = -dz$, & le premier membre de l'équation seroit devenu négatif & $= -\frac{dz}{dx}$; mais on l'auroit rendu positif en changeant les signes de tous les termes du second membre.

117. On peut quelquefois trouver l'intégrale d'une équation fort facilement sans avoir recours à la méthode de Newton. Soit, par exemple, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{5x}$, je suppose $y = b x^m$, le coefficient b & l'exposant m étant des quantités indéterminées. Substituant $b x^m$ au lieu de y dans la proposée, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} b x^{m-1}$, ou dy

$$= \frac{4}{5} b x^{m-1} dx, \text{ \& } y = \frac{4}{5^m} b x^m = b x^m; \text{ donc } \frac{4}{5^m} = 1,$$

ou $\frac{4}{5} = m$, & $y = b x^{\frac{4}{5}}$, b étant indéterminé, & l'on pourra donner à b telle valeur qu'on voudra.

On doit remarquer aussi que si la quantité qu'on doit substituer dans le rectangle vertical E R S P au lieu de y , étoit complexe, il faudroit prendre son quarré, lorsque le terme dans lequel se fait la substitution contient y^2 , son cube, si le terme contient y^3 , &c.

On peut quelquefois commencer l'opération par la plus haute puissance de la quantité corrélatrice, en descendant par degré aux puissances inférieures. Par exemple, si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$.

Après avoir disposé les termes d'une manière contraire à l'ordinaire, en commençant par le plus haut terme $2x$, comme on le voit (Fig. 15), on trouveroit, suivant la méthode, xx pour le premier terme de la valeur de y . Pour trouver le second terme on substituera xx au lieu

de y dans le terme $+\frac{y}{xx}$ du rectangle E R S P, & on écrira le résultat 1 dans le rectangle R S Q F au second rang sous le terme $+3$, on prendra la somme 4 des deux termes correspondans $+1$ & $+3$, on la multipliera par x , & ayant divisé le produit $4x$ par l'exposant 1 de x dans le même produit, on aura $+4x$ pour le second terme de la série cherchée, on trouvera les autres termes en suivant la règle prescrite.

REMARQUE I. Lorsque la suite des exposans dans une série est interrompue, on peut mettre 0 à la place du terme qui manque, en lui donnant le signe $+$ ou $-$ comme on voudra.

REMARQUE II. Parmi les suites qui expriment la valeur de y en x , ou la valeur de x en y , on préférera celles qui donnent x en y , si elles sont plus convergentes que celles qui donnent y en x . Par exemple, la série $xx + 4x + 0 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx}$ &c. qui désigne la valeur de y sera conver-

gente en supposant $x > 1$. En observant ce qu'on a dit ci-dessus (115), c'est-à-dire, en écrivant a , par exemple, pour le premier terme d'une série qui doit donner la valeur de y , on pourra ensuite, en donnant à a différentes valeurs, avoir autant de séries différentes qu'en voudra. On trouve encore des séries finies comme celle qu'on a trouvée ci-dessus (114).

118. PROBLÈME. *Intégrer les équations qui contiennent plus de deux variables avec leurs premières différences & leurs produits quelconques.* Lorsque l'équation proposée contient trois variables, si la relation de deux de ces variables est connue, on se servira de cette relation pour trouver le rapport des différences de ces deux variables, & pour éliminer l'une de ces variables avec sa différence; ainsi on n'aura plus qu'une équation à deux variables qu'on pourra intégrer par quelque une des méthodes précédentes. Si cette relation est inconnue, on pourra la former à volonté, & réduire, par le moyen de cette relation, l'équation proposée à la forme de l'une de celles que nous avons intégrées dans les deux derniers problèmes. Si l'équation contient quatre variables, on la réduira à trois par la relation donnée ou prise à volonté entre deux de ses variables, & on réduira ensuite celle-ci à deux variables. Si la proposée contient cinq variables, on la réduira à quatre par une relation supposée, si elle n'est donnée par l'état de la question; on réduira ensuite le nombre des variables à trois & enfin à deux, & ainsi de suite, quelque nombre que l'on ait de variables.

Soit l'équation à trois variables $2dx - dz + xdy = 0$, dans laquelle la relation entre deux de ses variables n'est point déterminée. On formera à volonté cette relation, en supposant, par exemple, $y = x$, ou $x = yy$, ou, &c. ou bien entre y & z , en supposant $y = z + a$, $y = z + b$, $y = z^2$ &c. Supposons qu'on préfère la relation $x = yy$; l'on aura $dx = 2ydy$. Substituant ces valeurs de x & de dx dans la proposée, il vient $4ydy - dz + yydy = 0$, & en intégrant $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$, ou $z = 2yy + \frac{y^3}{3}$ pour la relation de z & de y , & en écrivant x

pour y^2 & $x^{\frac{3}{2}}$ pour y^3 , l'on aura $2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = z$,
 équation entre z & x ; on auroit trouvé des résultats différents en égalant l'intégrale à une constante. Dans le nombre infini de relations que peuvent avoir les trois variables x, y, z ; nous en avons trouvé une qui est représentée par les équations $x = yy$, $2yy + \frac{y^3}{3} = z$,

$2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = z$; & comme on peut en trouver une infinité d'autres, il est évident que c'est un cas particulier de l'intégrale générale de l'équation proposée.

Nous terminerons cette matière en remarquant que lorsque l'on aura réduit l'équation proposée, à la forme $\frac{dy}{dx} = p$, p étant une suite finie ou infinie de termes composés des variables x & y , on aura $dy = p dx$, & $y = S. p dx + C$. Si l'on peut avoir l'intégrale $S. p dx$, il sera inutile d'employer la méthode de Newton. Ce sera la même chose si l'on peut avoir l'intégrale de l'équation $dy - p dx = 0$, par le moyen d'un multiplicateur ou sans ce multiplicateur. Ce sera encore la même chose lorsque la proposée contenant plus de deux variables, aura été réduite à deux variables, & qu'on pourra en trouver l'intégrale par les méthodes ci-dessus.

DE LA SÉPARATION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

119. Soit l'équation $aydx = bxdy$, on séparera facilement les variables en divisant les deux membres par x & y , ce qui donnera $\frac{a dx}{x} = \frac{b dy}{y}$, équation où les indéterminées sont séparées & qu'on peut facilement intégrer. Si l'on avoit cette autre équation

tion $\frac{b dy}{x^m y} = a dx$, en multipliant par x^m , l'on auroit $\frac{b dy}{y} = a x^m dx$, équation dont les variables sont séparées, & qu'il est aisé d'intégrer, par la méthode des différentielles à une seule variable.

Il est bon de remarquer qu'il peut arriver qu'aucun des deux membres de l'équation séparée ne soit intégrable algébriquement, quoique l'équation qui a produit la différentielle soit, ou algébrique, ou réductible à une forme algébrique.

Dans la première équation séparée, l'on a $\frac{a dx}{x} = \frac{b dy}{y}$, & en intégrant, $a L.x = b L.y + L.f$, la constante qu'on ajoute peut être un logarithme, ou $L.x^a = L.f y^b$; donc $x^a = f y^b$, équation algébrique. Si l'on vouloit intégrer l'autre équation séparée $\frac{b dy}{y} = a x^m dx$, l'on trouveroit facilement

$$b L.y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} = f x^p L.c, \text{ (en faisant } f = \frac{a}{m+1}, m+1 = p, \text{ \& } c \text{ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique } = 1 \text{)}; \text{ donc } y^b = c^{f x^p}.$$

Il est aisé de voir par ce qu'on vient de dire, que la séparation des variables, consiste à faire en sorte que chaque terme d'une équation ne contienne qu'une seule variable. Il n'est pas moins évident qu'on peut intégrer du moins par les quadratures

dratures toute différentielle dont les variables sont séparées.

Toute équation de cette forme $P R dx = Q V dy$, pourra être séparée si P & V sont des fonctions de x sans y , & R & Q des fonctions de y sans x : car en divisant par $R V$, l'on a $\frac{(P dx)}{V} = \frac{(Q dy)}{R}$, équation dans laquelle les variables sont séparées: ainsi l'équation $x^2 y^3 dx = a y^5 x^3 dy$ admet la séparation des variables. En effet en divisant par $y^3 x^3$, l'on a $\frac{x^2}{x^3} dx = \frac{a y^5}{y^3} dy$, ou $\frac{dx}{x} = a y^2 dy$.

Les moyens dont on se sert pour la séparation, sont les règles ordinaires de l'algèbre & les substitutions.

120. PROBLÈME. *Séparer les indéterminées dans les équations homogènes à deux variables x & y . On appelle équations homogènes celles dans lesquelles la somme des dimensions des variables, soit qu'elles soient mêlées ou qu'elles se trouvent seules, est la même dans tous les termes. Représentant toutes ces équations par $A dx + B dy = 0$, & supposant que la somme de ces dimensions est $= n$, faisant $y = x u$, ou $\frac{y}{x} = u$; en substituant la valeur*

de y , les fonctions A & B deviendront $A = x^n V$, & $B = x^n V'$, V & V' étant des fonctions de u sans x ni y : car puisque A & B

sont des fonctions homogènes de la dimension n , V & V' des fonctions de u ou de $\frac{y}{x}$, il est clair que V & V' doivent être des fonctions de dimension nulle de y & de x , c'est-à-dire telles que y & x aient le même nombre de dimensions au numérateur & au dénominateur. Cela posé, notre équation deviendra $x^n V dx + x^n V' dy = 0$, ou $V dx + V' dy = 0$. Mais l'équation $y = xu$, donne $x = \frac{y}{u}$, & $dx = \frac{u dy - y du}{u^2}$; donc en substituant la valeur de dx , l'on a $\frac{V u dy - V y du}{u^2} + V' dy = 0$. Otant la fraction & transposant, il vient $V u dy + u u V' dy = V y du$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{V du}{V u + u u V'}$. Mais V & V' sont des fonctions de u ; donc les variables sont séparables dans ces sortes d'équations.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^3 dx + y^2 x dy + b x^3 dy = 0$. Si l'on compare cette équation avec $A dx + B dy = 0$, l'on trouve $A = y^3$, $B = y^2 x + b x^3$, $n = 3$, $A = x^3 V$, $B = x^3 V'$; donc $V = \frac{y^3}{x^3}$, $V' = \frac{y^2 x + b x^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} + b$. Mais $\frac{y}{x} = u$; donc $V = u^3$, & $V' = u^2 + b$. Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{V du}{V u + u u V'} = \frac{dy}{y}$, il vient $\frac{u du}{2 u u + b} = \frac{dy}{y}$;

& en intégrant, $L.y = \frac{1}{2} L.(2uu + b) + L.C$,
ou $y = C(2uu + b)^{\frac{1}{2}}$, & $y^2 = C^2 \left(\frac{2y^2}{x^2} + b \right)$, en
remettant la valeur de u .

121. PROBLÈME. Intégrer les équations différentielles homogènes à trois & tant de variables qu'on voudra, lorsque A, B, C , sont des fonctions homogènes de x, y & z dans tous les termes. Soit $A dx + B dy + C dz = 0$, l'équation qu'on demande d'intégrer, A, B, C étant des fonctions homogènes des variables x, y & z , nous prenons une équation à trois variables seulement, mais celles qui en ont d'avantage ne demandent pas d'autres calculs. On examinera d'abord si la proposée est possible en cherchant si elle donne l'équation de condition ci-dessus dont nous avons parlé ci-dessus. Si elle étoit absurde, on l'abandonneroit. Ensuite on fera $y = xu$, & $z = xt$, & l'on substituera ces valeurs dans l'équation proposée. Supposons maintenant que A, B, C soient des fonctions de la dimension m , il est évident que l'on aura $A = x^m f$, $B = x^m g$, $C = x^m h$, f, g, h étant des fonctions de u & de t . Substituons aussi la valeur $x du + u dx$ de dy & la valeur $x dt + t dx$ de dz , on aura la transformée suivante $x^m dx (f + gu + ht) + x^{m+1} g du + x^{m+1} h dt = 0$, ou en divisant par x^{m+1} , & par le multiplicateur de $x^m dx$, $\frac{dx}{x} + \frac{g du + h dt}{f + gu + ht} = 0$. Il est visible que le premier terme ne contient qu'une seule variable x ,

& que x ne se trouve que dans ce terme. L'intégrale de cette équation est $L. x + S. \frac{gdu + hdt}{f + gu + ht} = D$ constante; donc. $L. x - D = S. \frac{gdu + hdt}{f + gu + ht}$; donc la différentielle $\frac{gdu + hdt}{f + gu + ht}$ est complète, & l'on trouvera son intégrale par quelque une des méthodes précédentes.

122. COROLLAIRE I. De ce que $\frac{dx}{x} + \frac{gdu + hdt}{f + gu + ht} = 0$, est une différentielle complète, on peut tirer tout de suite le facteur P , par lequel il faudroit multiplier la proposée pour l'intégrer sans la séparation des indéterminées ^{*}: car l'équation n'est devenue complète qu'en divisant par $x^{m+1} (f + gu + ht)$, ou par $x A + y B + z C$; puisque $x^{m+1} f = x A$, $x^{m+1} gu = x^m g u x = B u x = B y$, & $x^{m+1} h t = x^m h t x = C t x = C z$; donc $\frac{A dx + B dy + C dz}{A x + B y + C z}$ est une différentielle complète; donc le facteur P qui avoit disparu par l'égalité à 0 étoit =

$$\frac{1}{A x + B y + C z}.$$

123. COROLLAIRE II. De-là suit le beau théorème de M. Fontaine, sçavoir que si $A dx$

^{*} Il s'agit de la séparation de x ; car les u & t peuvent être mêlés entre eux.

$+ B dy + C dz$ est une différentielle homogène sans constantes, & telle que m soit le degré des fonctions A, B, C , l'intégrale de cette différentielle sera $\frac{Ax + By + Cz}{m + 1}$; en effet, en substi-

tuant xu au lieu de y , & tx au lieu de z , la différentielle devient $x^m dx (f + gu + ht) + x^{m+1} g du + x^{m+1} h dt$; mais cette différentielle ne peut être intégrable à moins que son intégrale ne soit $\frac{x^{m+1} (f + gu + ht)}{m + 1}$, que l'on

trouve en intégrant la quantité $x^m dx (f + gu + ht)$ en regardant x seul comme variable. De plus il est visible qu'il ne lui faut ajouter aucune fonction de u & de t , puisque si on lui en ajoutoit une, lorsqu'on différencieroit l'intégrale, ce qui viendrait de cette addition ne seroit pas multiplié par x^{m+1} comme le font les termes $x^{m+1} g du$, & $x^{m+1} h dt$. Cela posé, remettons dans

$\frac{1}{m + 1} x^{m+1} (f + gu + ht)$, la fraction $\frac{y}{x}$ au

lieu de u , $\frac{z}{x}$ au lieu de t , A au lieu de $x^m f$, B au lieu de $x^m g$, & C au lieu de $x^m h$, & nous aurons $\frac{Ax + By + Cz}{m + 1}$ *, pour l'intégrale de la différentielle $A dx + B dy + C dz$.

124. COROLLAIRE III. Puisque A, B, C , &c. étant des fonctions homogènes de dimension m

* On doit se souvenir d'ajouter une constante.

de variables sans constantes, la différentielle $A dx + B dy + C dz + D du + \&c.$ a toujours pour intégrale $\frac{Ax + By + Cz + Du + \&c}{m+1}$,

il est évident qu'on trouvera l'intégrale de ces sortes de différentielles en substituant au lieu de dx , dy , dz , $\&c.$ les variables x , y , z , $\&c.$ & divisant le résultat par le nombre qui désigne le degré de dimension de cette fonction ainsi réduite. Donc si V est une fonction homogène des variables x , y , z ; de sorte que l'on ait $dV = A dx + B dy + C dz$, on aura $V = \frac{Ax + By + Cz}{n}$,

n étant la dimension homogène de cette fonction. Or il est visible qu'en substituant x , y , z , au lieu de dx , dy , dz , le degré de dimension n'a pu augmenter que d'une unité; donc $m+1 = n$.

Soit la différentielle $dV = 2x dx + L \frac{y+x}{y-x}$
 $+ \frac{2xx(y dx - x dy)}{y^2 - x^2}$, dans laquelle il n'y a aucune lettre constante, l'on aura en substituant x au lieu de dx , y au lieu de dy , & divisant par 2, parce que la dimension réduite est du second degré, $V = xx + L \frac{y+x}{y-x}$. On peut voir, par cet exemple, qu'il est facile, en suivant cette méthode, d'intégrer toutes les différentielles de cette espèce, & d'un nombre quelconque de variables, ce qui seroit souvent très-difficile par d'autres méthodes.

Lorsque V sera une fonction de la seule variable x , les corollaires précédens pourront

avoir lieu, en supposant même que cette fonction est de cette forme $V = ax^4 L. x$. En effet si l'on supposoit $dV = ax^3 L. x. dx$, l'on auroit, selon la méthode expliquée, $V = \frac{ax^4 L. x}{4}$. Ce qui est vrai, car la différentielle de

$$\frac{ax^4 L. x}{4} \text{ est } \frac{3ax^3 L. x}{4} + \frac{ax^4 dx}{4} = ax^3 L. x. dx.$$

125. PROBLEME. Séparer les variables de l'équation $dy(y-x) = \frac{mdx(1+yy)\sqrt{1+yy}}{\sqrt{1+xx}}$.

Supposons $y = \frac{x+u}{1+uu}$, l'on aura $y' - x' =$

$$\frac{-u(1+xx)}{1+uu}, 1+yy = \frac{(1+xx)(1+uu)}{(1+uu)^2},$$

$$\& dy = \frac{dx(1+uu) - du(1+xx)}{(1+uu)^2}. \text{ En}$$

substituant ces valeurs dans la proposée, elle devient $-udx(1+uu) + udu(1+xx) = \frac{mdx(1+uu)\sqrt{1+uu}}{u du}$; d'où l'on tire $\frac{dx}{1+xx} = \frac{u du}{(1+uu)(m\sqrt{1+uu}+u)}$.

équation séparée. Si dans cette équation l'on fait $1+uu = z$, l'on aura $\frac{dx}{1+xx} =$

$$\frac{dz}{z(mz + \sqrt{z-1})}, \& \text{ faisant dans celle-ci}$$

$$z = \frac{1+zz}{zz}, \text{ l'on a } \frac{dx}{1+xx} =$$

$$\frac{2dz(1-zz)}{(1+zz)(m+1+(m-1)zz)}; \text{ équation dont}$$

chaque membre s'intègre par la méthode des fractions rationnelles à une seule variable; il est donc facile d'intégrer l'équation proposée. En effet lorsqu'on aura trouvé une valeur de z , on aura celle de t , ensuite celle de u , & enfin celle de y .

126. PROBLÈME. *Rendre homogène l'équation*
 $dx(a+bx+cy) = (f+x+hy)dy$
*qui peut être regardée comme l'équation générale du premier ordre * & à deux variables. Je fais* $a+bx+cy = t$, $f+x+hy = u$, *pour avoir* $t dx = u dy$; *or la substitution donne* $x = \frac{ht-cu+ah+cf}{bh-c}$ *&* $y = \frac{bu-t+a-hf}{bh-c}$; *d'où*

l'on tire en différentiant, $dx:dy::hdt-cdu:bdu-dt$; *mais l'équation* $t dx = u dy$, *donne* $dx:dy::u:t$, *donc* $u:t::hdt-cdu:bdu-dt$, *ou* $dt(ht+u) = du(bu+ct)$, *équation-homogène dont on peut par conséquent séparer les indéterminées. Si l'on suppose* $bh-c=0$, x *&* y *seront infinis & dans ce cas la méthode qu'on vient d'employer est inutile. Mais alors l'on a* $bh=c$, $\frac{bh}{c}=1$.

Donc si l'on fait $m = \frac{h}{c}$, *l'équation proposée*

* Car si le terme où x se trouve sans coefficient, avoit un coefficient, en divisant toute l'équation par ce coefficient, on lui donneroit la forme de la proposée.

pourra dans ce cas se réduire à cette forme,
 $a dx + dx(bx + cy) = f dy + m(bx + cy) dy.$

Et supposant $bx + cy = z$, l'on aura $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{a + (bx + cy)}{f + m(bx + cy)} = \frac{a + z}{f + mz}.$$
 De plus $dy =$

$$\frac{dz - bdx}{c}; \text{ donc } dy = \frac{(a + z)dx}{f + mz} = \frac{dz - bdx}{c},$$

$$\& dx = \frac{dz(f + mz)}{ac + bf + (c + mb)z}, \text{ équation séparée.}$$

Ainsi l'équation générale du premier ordre ne peut être rendue homogène dans les cas où l'on a $bh = c$, mais alors elle peut être séparée.

Si l'on vouloit intégrer l'équation homogène $(z + au).dz + (bz + cu).du = 0$, sans séparer les indéterminées, on le pourroit facilement, car selon ce qu'on a dit ci-dessus (122), lorsque les variables sont x, y, z , &c. le facteur P est dans ces

$$\text{formes d'équations} = \frac{I}{Ax + By + Cz + \&c.}, \&$$

$$\text{par conséquent dans le cas présent} = \frac{I}{Ax + By} =$$

$$\frac{I}{z(z + au) + u(bz + cu)}, \text{ en changeant } x \text{ en } z$$

& y en u .

Si l'on avoit $Ax + By = 0$, le facteur P seroit infini. Par exemple, dans l'équation

$$y dx - x dy = 0, \text{ le facteur } \frac{I}{Ax + By} \text{ est} =$$

$$\frac{I}{xy - xy} = \frac{I}{0 \times yx} = \infty.$$

On pourra néanmoins intégrer dans ce cas en prenant un multiple fini de ce facteur. Supposons qu'on

prenne pour multiplicateur de la proposée la quantité $x^0 y^2$ (*), la différentielle complète sera $\frac{y dx - x dy}{y^2}$ dont l'intégrale $\frac{x}{y}$. Si l'on prenoit le multiplicateur $\frac{1}{xy}$, l'on auroit $\frac{y dx - x dy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est $L.x - L.y = L. \frac{x}{y}$.

127. PROBLÈME. Trouver les conditions que doivent avoir les exposans des variables dans les équations différentielles à deux variables seulement pour qu'on puisse les rendre homogènes par la substitution de z^h au lieu de y , h étant un exposant indéterminé. 1°. Lorsque les équations n'ont que trois termes, on peut les représenter par cette formule générale $a y^n x^m dx + b y^p x^q dx + c x^r y^s dy = 0$, les exposans des variables étant des nombres quelconques, ou 0. Puisque nous supposons $y = z^h$, nous aurons $dy = h z^{h-1} dz$, $y^n = z^{nh}$, $y^p = z^{ph}$, $y^s = z^{sh}$, & notre équation deviendra $a z^{nh} x^m dx + b z^{ph} x^q dx + c h x^r z^{sh+h-1} dz = 0$. Pour que cette équation soit homogène, il faut que la somme des exposans soit la même dans chaque terme; donc on doit

* En regardant 0 comme une quantité a infiniment petite, l'on a $a \cdot xy = 0 \cdot xy$, & multipliant $\frac{1}{a \cdot xy}$ par $a \cdot xy^2$, l'on a $x^0 y^2 = y^2$.

avoir ces deux équations $nh + m = hq + p$, & $nh + m = r + hs + h - 1$. La première donne

$$h = \frac{p-m}{n-q}, \text{ \& en substituant cette valeur de } h$$

dans la seconde, on trouvera $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) \cdot (n - q)$, équation qui exprime la condition que doivent avoir les exposans de la proposée pour qu'on puisse la rendre homogène par la supposition de $y = z^b$, h étant

$$= \frac{p-m}{n-q}.$$

Cette substitution est cependant impossible lorsque $p = m$, ou $n = q$; mais alors on peut séparer facilement les indéterminées : car si $p = m$, l'on aura (en substituant m au lieu de p , divisant ensuite par x^r & par $(ay^n + by^q)$, $x^{n-r} dx + \frac{cy^q dy}{ay^n + by^q} = 0$. Si $n = q$ en divisant par x^r , & par y^n , la proposée devient $ax^{n-r} dx + bx^{p-r} dx + cy^{q-n} dy = 0$.

2°. Si les équations ont quatre termes, on peut toujours les représenter par cette formule $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy + fx^t y^u dy = 0$, la supposition de $y = z^b$ donnera $az^{n+b} x^m dx + bz^{q+b} x^p dx + chx^r z^{b+s} + b-1 dz + fhx^t \times z^{b+u+b-1} = 0$.

Pour que cette équation soit homogène, il est nécessaire que l'on ait les trois équations $hn + m = hq + p = r + hs + h - 1 = t + hu + h - 1$. La première donne $h = \frac{p-m}{n-q}$; la seconde équation $hq + p = r + hu + h - 1$, en

substituant la valeur de h & réduisant, donne $(p - r + 1).(n - q) = (s - q + 1).(p - m)$ pour la première condition des exposans. L'équation $hq + p = r + hn + h - 1$, après la substitution de la valeur de h & la réduction, donne $(p - r + 1).(n - q) = (u - q + 1).(p - m)$ pour la seconde condition des exposans; & s'ils ont ces deux conditions, l'équation de quatre termes, devindra homogène par la sup-

position de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. On trouvera de la même manière que les exposans doivent avoir trois conditions pour les équations à cinq termes, quatre conditions pour les équations à six termes & ainsi de suite; de sorte que le nombre des termes étant N , le nombre des équations de condition sera $N - 2$.

Pour sçavoir si l'équation de trois termes $4y^3 x^{\frac{1}{2}} dx + 3y^2 dx - b x^{\frac{1}{2}} dy = 0$, peut

devenir homogène en faisant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. Je remarque que l'on a ici $n = 3$, $m = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $p = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $s = 0$; substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on trouve qu'elle est vraie: car l'on a $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$, ou $(0 - 2 + 1) \times (0 - \frac{1}{2}) = (0 - \frac{1}{2} + 1).(3 - 2)$, ou $-1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2} + 1$, ou $+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; donc en fai-

sant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$, l'équation proposée deviendra homogène. En effet l'on aura $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $y^2 = z^{-1}$ & $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$. Donc en substi-

tuant ces valeurs dans la proposée, l'on aura
 $4z^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + 3z^{-1}dx + 3x^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{3}{2}}dx = 0$,
 équation homogène.

128. PROBLÈME. Séparer les indéterminés dans
 l'équation différentielle à deux variables $ap y^n dy +$
 $b y^{n+1} p' dx + c y^q p'' dx = 0$, dans laquelle
 p, p', p'' sont des fonctions de x sans y . 1°. En
 divisant la proposée par y^q & par ap , il vient
 $y^{n-q} dy + \frac{b y^{n-q+1} p' dx}{ap} + \frac{c p'' dx}{ap} = 0$,
 dans laquelle le premier & le dernier terme ne
 contiennent chacun qu'une seule variable.

Maintenant il est visible que si on pouvoit trou-
 ver une fonction V de x sans y , telle qu'en multi-
 pliant cette équation ainsi réduite, elle rendît les
 deux premiers termes une différentielle exacte,
 on trouveroit l'intégrale en prenant celle des deux
 premiers termes & celle du terme $\frac{c V p'' dx}{ap}$.

Le premier terme après la multiplication, sera =
 $V y^{n-q} dy$, & le second sera $= \frac{b y^{n-q+1} V dx}{ap}$;

& la différentielle exacte sera $A dx + \frac{B dy}{ap}$, en
 faisant le multiplicateur $\frac{b y^{n-q+1} V}{ap} = A$;

& $V y^{n-q} = B$. Il faut donc (88), que l'on ait
 $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou $\frac{(n-q+1) \cdot b V p' y^{n-q}}{ap} =$

$\frac{y^{n-q} dV}{dx}$; donc $\frac{(n-q+1) b p' dx}{ap} = \frac{dV}{V}$;

Et en intégrant, $L. V = S. \frac{(n - q + 1) b p' dx}{a p}$
 $= S. \frac{(n - q + 1) b p' dx}{a p} . L. e$ (e étant le nom-
bre dont le logarithme hyperbolique $= 1$)
 $= L. e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}}$ en faisant $n - q + 1 = g$;
donc en repassant des logarithmes aux nombres ,
 $V = e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}}$. Or $e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}}$ dépend de
l'intégration des différentielles à une seule va-
riable ; ainsi l'on peut supposer V connue.

Si l'on substitue cette valeur de V dans l'équa-
tion $V y^{n-q} dy + \frac{b y^s V p' dx}{a p} + \frac{c V p'' dx}{a p} = 0$,
les deux premiers termes deviendront une différen-
tielle exacte, qu'on trouvera en intégrant le premier
terme dans la supposition de y seul variable ; mais
l'intégrale de ce premier terme dans cette supposi-
tion, est $= \frac{V y^{n-q+1}}{n-q+1} = \frac{V y^s}{g}$; donc l'inté-
grale de toute l'équation sera $\frac{V y^s}{g} +$
 $S. \frac{c V p'' dx}{a p} = C$. En substituant la valeur de V ,

on aura $\frac{y^s}{g} . e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}} + S. \left(\frac{c p'' dx}{a p} . e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}} \right)$
 $= C$, multipliant tout par g , divisant par
 $e^{S. \frac{g b p' dx}{a p}}$, transposant le second terme ;

& prenant la racine g , il vient $y =$

$$\left(gC.e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}} - S.\left(\frac{gcp''dx}{ap}.e^{S.\frac{gp'dx}{ap}}\right) e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

les indéterminées feront donc toujours séparées & l'équation intégrée par cette méthode. Si g , ou $n - q + 1$ étoit $= 0$, la méthode paroîtroit ne rien donner; mais dans ce cas on auroit

$n - q = -1$, & la proposée se réduiroit à $\frac{dy}{y} +$

$\frac{bp'dx}{ap} + \frac{cp''dx}{ap} = 0$, dont l'intégrale est

$$L.y + \frac{b}{a} S.\frac{p'dx}{p} + \frac{c}{a} S.\frac{p''dx}{p} = C.$$

129. LEMME. Toutes les équations à deux variables & à trois termes, peuvent se réduire à cette forme $dy = ax^m dx + by^n dx$. Puisque ces équations ont deux termes où se trouve la différentielle d'une variable & un terme qui renferme la différentielle de l'autre variable, il est visible qu'elles peuvent être représentées par l'équation $Az^s u^f du = B u^s z^b dz + C u^r z^c dz$. Divisant tout par Az^s & par u^s on la réduit à celle-ci $u^{f-s} du = \frac{B}{A} z^{b-s} dz +$

$\frac{C}{A} u^{r-s} z^{c-s} dz$, qu'on peut exprimer ainsi: $u^{a'} du + E z^{b'} dz + F u^{c'} z^{c''} dz$. Faisant maintenant

$u = y^{\frac{1}{a'+1}}$, l'on aura $u^{a'} du = \frac{dy}{a'+1}$. En

substituant la valeur de u & de $u^{a'} du$, & multipliant par $a' + 1$, l'on a $dy = (a' + 1) E z^{b'} dz$

$+ (a' + 1) F y^{\frac{c'}{a' + 1}} z^{c''} dz$, qu'on peut exprimer ainsi $dy = G z^b dz + H y^q z^{c''} dz$.

Supposant $x = z^{c'' + 1}$, ou $z = x^{\frac{1}{c'' + 1}}$, on en

tirera $z^{c''} dz = \frac{dx}{c'' + 1}$, $dz = \frac{1}{c'' + 1} x^{\frac{1}{c'' + 1} - 1} dx$,

& substituant ces valeurs de z & de dz , notre

équation deviendra $dy = \frac{G}{c'' + 1} x^{\frac{b' - c''}{c'' + 1}} dx +$

$\frac{H}{c'' + 1} y^q dx$, qu'on peut exprimer par $dy =$

$ax^m dx + by^q dx$.

130. PROBLÈME. Une équation différentielle quelconque à deux variables & à trois termes étant donnée, séparer les indéterminées pour l'intégrer ensuite, ou l'intégrer en les séparant. On pourra toujours réduire la proposée à la forme $dy = ax^m dx + by^q dx$, comme on vient de le démontrer, & on pourra résoudre cette équation comme il suit :

1°. Si $m = 0$, l'équation sera $dy = adx + by^q dx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{a + by^q} = dx$, équation séparée.

2°. Si $q = \frac{m}{m + 1}$, on fera $x = z^{\frac{1}{m + 1}}$, ou

$x^m = z^{\frac{m}{m + 1}}$, $dx = \frac{1}{m + 1} z^{\frac{1 - m}{m + 1}} dz$, & en substituant

les valeurs de x , de dx & de q , l'équation deviendra
 dy

$$dy = \frac{a dz}{m+1} + \frac{b}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz,$$

ou $(m+1) \cdot z^{\frac{m}{m+1}} dy = a z^{\frac{m}{m+1}} dz + b y^{\frac{m}{m+1}} dz$,
qui est homogène, & dont par conséquent on peut
séparer les indéterminées.

3°. Si $q = 1$, on pourra mettre la proposée
sous cette forme $y^o dy + f x^m y^o dx +$
 $k y^1 dx = 0$, & la comparer avec la formule du
problème précédent, ce qui donnera $a = -1$,
 $n = 0$, $p = x^o = 1$, $c = f$, $q = 1$, $b = k$,
 $p' = x^o = 1$, $p'' = x^m$, & en substituant ces
valeurs dans l'intégrale qu'on a trouvée dans ce
problème, l'on aura l'intégrale cherchée. A cause
de $p = x^o = p' = 1$, l'on aura le facteur V

du problème précédent $= e^{\int \frac{gk dx}{a}} = e^{\frac{gkx}{a}}$.

4°. Enfin on peut toujours intégrer l'équation
proposée en séparant en même tems les indétermi-
nées, quels que soient les exposans m & q , on
peut même trouver une infinité de suites qui ex-
primeront la valeur de y en x , en laissant l'ex-
posant m indéterminé & prenant un nombre
quelconque 1, 2, 3, &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. pour l'expo-
sant q ; il est même facile d'avoir la valeur de y
en laissant cet exposant indéterminé. Puisque

$$y = C + \frac{a x^{m+1}}{m+1} + \int b y^q dx \text{ en ajoutant}$$

la constante C, on pourra trouver une infinité de
suites qui donneront la valeur de y en x .

131. Soit l'équation qu'on appelle du Comte Riccati $dy = ax^m dx + by^2 dx$; en intégrant de part & d'autre, il vient $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S. by^2 dx$. Supposant maintenant que la série qui doit exprimer la valeur de y en x , soit $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + p$, on aura $y^2 = \frac{a^2 x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{2ax^{m+1}p}{m+1} + p^2$, & la différentielle $by^2 dx = \frac{ba^2 x^{2m+2} dx}{(m+1)^2} + \frac{2bax^{m+1}p dx}{m+1} + bp^2 dx$, & en intégrant de part & d'autre, on trouvera $S. byy dx = \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 \cdot (2m+3)} + S. \frac{2bax^{m+1}p dx}{m+1} + S. bp^2 dx$, & par conséquent $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 \cdot (2m+3)} + S. \frac{2bax^{m+1}p dx}{m+1} + S. bp^2 dx$. Si l'on suppose maintenant $p = \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 \cdot (2m+3)} + p'$; en substituant cette valeur de p dans les différentielles $\frac{2bax^{m+1}p dx}{m+1}$, & $bp^2 dx$, on trouvera en prenant les intégrales, d'autres termes de la suite cherchée. On ne doit pas oublier d'ajouter une constante.

On peut aussi employer les rectangles de Newton, & il est aisé de voir que la méthode dont nous venons de faire usage fournit généralement la séparation aussi bien que l'intégration.

132. Il y a une infinité de valeurs de m dans lesquelles l'équation de Riccati peut être séparée. Pour le faire voir représentons cette équation par la formule $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, a & b étant des quantités positives ou négatives *. 1°. Si $m = 0$, l'on aura $dy + ay^2 dx = b dx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{b - ay^2} = dx$, équation séparée.

2°. Supposons $y = \frac{z}{x}$, l'on aura $dy = \frac{cdz}{zz}$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, & ôtant les fractions l'on trouvera $-cdz + accdx = bx^m zz dx$, dans laquelle faisant $t = x^{m+1}$ pour

avoir $x^m dx = \frac{dt}{m+1}$, & $dx = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}} dt}{m+1}$, il viendra en transposant & changeant ensuite tous

les signes, $cdz + \frac{bzz dt}{m+1} = \frac{acc t^{\frac{-m}{m+1}} dt}{m+1}$, qui, en divisant par c & supposant $\frac{b}{m+1} = a'$

& $\frac{acc}{m+1} = b'$, devient $dz + a'zz dt =$

$b't^n dt$ (en faisant encore $\frac{-m}{m+1} = n$), équation qui a la même forme que la proposée & qui

* Si dans l'équation du problème le coefficient de $y^2 dx$ est positif, rien n'empêche de le supposer maintenant négatif.

par conséquent doit admettre la séparation dans les mêmes cas. De-là il suit que si la proposée est séparable lorsque $m = n$, elle le sera aussi lorsque

$$m = \frac{-n}{n+1}.$$

Supposons $y = \frac{z}{x} - \frac{z}{xx}$, pour avoir $dy = -\frac{dx}{xx}$

$-\frac{dz}{xx} + \frac{2z dx}{x^3}$. Si l'on substitue ces valeurs de dy

& de y , l'on aura en multipliant par $-xx$,

$dz - \frac{2xz dx}{x^2} = -b x^{m+2} dx$. Maintenant si

l'on fait $x = \frac{1}{t}$, il viendra $dz + a z z dt =$

$b t^{-m-4} dt$, qui est semblable à la proposée. Donc

si la séparation réussit lorsque $m = n$, elle réussira aussi lorsque l'on aura $m = -n - 4$. Ainsi du cas $m = n$ il s'en suit les deux cas ; savoir,

$m = \frac{-n}{n+1}$, & $m = -n - 4$, & comme d'ail-

leurs la séparation réussit lorsque $m = 0$, ou lorsque $m = n = 0$, en employant alternativement ces formules, l'on a $m = -4$; $m = -\frac{2}{3}$; $m =$

$-\frac{8}{3}$, $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$, $m = -\frac{16}{7}$, &c. Ces cas

sont compris généralement dans la formule $m =$

$-\frac{4}{2P \pm 1}$, P étant un nombre entier positif

quelconque ou 0.

Mais pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, voici comment je raisonne : Dans la formule de Ricati les indéterminées sont sépa-

rables lorsque $m = 0$, premier cas : & de-là il

fuit que la même chose a lieu lorsque $m = \frac{-n}{n+1}$,

second cas. De plus la séparation réussit lorsque

$m = n$; elle réussira donc aussi lorsque $m = -n$

-4 , troisième cas. Si $m = 0$, l'on aura le cas de

séparabilité. 1°. Si $m = 0 = n$. 2°. Si $n = 0$,

l'on a alors $m = -4$: car par la troisième formule

$m = -n - 4$. 3°. Si $m = n = -4$, la

formule $m = \frac{-n}{n+1}$ donne $\frac{-4}{-4+1} = \frac{-4}{3}$. Si

maintenant $m = n = \frac{-4}{3}$, la formule $m =$

$-n - 4$ donne $\frac{-4}{3} - 4 = \frac{-4-12}{3} =$

$\frac{-8}{3}$. Si $m = \frac{-8}{3} = n$, la formule $m =$

$\frac{-n}{n+1}$ fait voir que la séparation aura encore lieu si

l'on divise $-\frac{8}{3}$ par $n + 1 = -\frac{8}{3} + 1 =$

$\frac{-8+3}{3} = -\frac{5}{3}$, c'est-à-dire, si l'on fait $m =$

$-\frac{8}{5}$, &c.

L'équation $dy + fyyz^s dz = gz^s dz$ se réduit

facilement à la formule de Ricati de la manière sui-

vante : je change f en a , & je fais $z^s dz = dx$, ou $x =$

$\frac{z^{s+1}}{s+1}$, ou $z^{s+1} = (s+1)x$; alors $z =$

$((s+1)x)^{\frac{1}{s+1}} = (h.x)^s$ en faisant $s+1 =$

Z_3

$\frac{1}{z+1} = n$; donc $dz = nh dx (hx)^{n-1}$, & $g z^p dz = gn h^n (h \cdot x)^{p+n-1} dx = b x^m dx$,
 en faisant $gn h^n = b$, & $p n + n - 1 = m$;
 donc en substituant, l'on aura $dy + a y y dx = b x^m dx$. Ainsi l'équation dont on vient de parler, admettra la séparation des indéterminées dans les mêmes cas que celle de Ricati.

Si l'on suppose que P soit un nombre infiniment grand, $m = \frac{-4P}{2P \pm 1}$ devient $= -2$, & l'équation de Ricati prend la forme $dy + a y y dx = \frac{b dx}{x x}$, & faisant $y = \frac{1}{z}$, l'on a $dy = -\frac{dz}{z z}$, $y y = \frac{1}{z z}$, & l'équation devient $-\frac{dz}{z z} + \frac{a dx}{z z} = \frac{b dx}{x x}$, équation homogène, & qui par conséquent admet la séparation des indéterminées.

Supposons $y = A x^p + t x^q$, en substituant les valeurs de $y y$ & de dy que donne cette supposition, dans l'équation de Ricati, elle deviendra $p A x^{p-1} dx + q x^{q-1} t dx + x^q dt + a x^{p+q} t t dx + a A A x^{2p} dx + 2 a A x^{p+q} t dx = b x^m dx$. Supposons maintenant $p - 1 = 2p$, $p A + a A A = 0$; $p + q = q - 1$, $q + 2 a A = 0$, l'on aura $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$. Donc en effaçant les termes qui sont

égaux à 0, l'on aura la transformée $x^{-2} dt + a x^{-4} t t dx = b x^m dx$ (B).

Si l'on suppose $m = -4$, $a y y$, qui est ici représenté par $a t t$, & b seront multipliés par une même puissance de x ; or alors les variables peuvent être séparées. En effet représentez -4 par m , l'équation deviendra $x^{-2} dt = b x^m dx - a t t x^m dx$, & supposant $m + 2 = n$, on aura en multipliant par x^2 , $dt = b x^n dx - a t t x^n dx$, ou $\frac{dt}{b - a t t} = x^n dx$, équation où les indéterminées sont séparées.

Soit de plus supposé $t = \frac{1}{z}$, l'équation B deviendra $d z + b x^{m+2} z z dx = a x^{-2} dx$, & supposant $z = A' x^{p'} + x^{q'} t'$, on aura, en opérant comme ci-devant, $p' A' x^{p'-1} dx + q' x^{q'-1} t' dx + x^{q'} dt' + b x^{2q+m+2} t' t' dx + b A' A' x^{2p'+m+2} dx + 2b A' x^{p'+q'+m+2} t' dx = a x^{-2} dx$. Supposant maintenant $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p' A' + b A' A' = 0$, $q' + 2b A' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$; l'on trouvera $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - b$; & la seconde transformée fera après avoir multiplié par x^{2m+6} , $dt' + b x^{-m-4} t' t' dx = a x^{2m+4} dx$. Cette équation admettra la séparation si $-m - 4 = 2m + 4$, ou si $-8 = 3m$, ou si $m = -\frac{8}{3}$. Si on suppose de

nouveau $t' = \frac{1}{z'}$, & $z' = A'' x^{p''} + x^{q''} t''$,

on trouvera que l'équation est séparable si $m = \frac{1}{2}$, & l'on pourra en continuant les substitutions, trouver de nouvelles valeurs de m qui rendront l'équation séparable.

Dans la première substitution on a $y = Ax^p + x^q t$, & $p = -1$, $q = -2$; dans la seconde substitution, on a $p' = -m - 3$, $q' = -2m - 6$, & ainsi de suite, de sorte que l'exposant qui représente q est toujours double de l'exposant qui représente p ; donc l'exposant p étant $-Pm - 2P - 1$, l'exposant q seroit $-2Pm - 4P - 2$. Donc en reprenant les substitutions précédentes & substituant les valeurs de t , t' , t'' , &c. l'on aura $y = Ax^{-1} + x^{-2}, \frac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-6}}, \frac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4-10}}, \&c. \times t$,

t étant une variable qu'on détermine par la substitution dans les équations séparées, t est le multiplicateur du second terme du dernier facteur. Si l'on suppose $m = \frac{-4P}{2P-1}$, il faudra continuer jusqu'au facteur dans lequel le premier terme en x aura pour exposant $-Pm - 2P - 1$, le second terme étant $x^{-2Pm-4P-2}t$. Si on substituoit $\frac{1}{z}$ au lieu de y , ensuite $Ax^p + x^q t$ pour z &c. on trouveroit les autres valeurs de m qui répondent à $\frac{-4P}{2P+1}$, & la valeur générale de y sera $y =$

$$\frac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-6}} \left(\frac{1}{A'x^{-2m-5} + x^{-4-10}} \right) \&c.$$

en continuant de même jusqu'à ce que le premier terme en x dans le dénominateur soit $x^{-(m(P+1)-2P-1)}$, alors le second terme sera $x^{-(2m+2)(P+1)-2P}$.

133. REMARQUE. Il ne faut pas confondre la séparation des variables avec l'intégration ; c'est-à dire , qu'on ne doit pas regarder une différentielle comme n'étant pas intégrable parce qu'on n'en peut pas séparer les indéterminées. Car dans les cas que l'équation de Riccati n'admet pas la séparation , on peut l'intégrer , ainsi qu'on l'a vu précédemment , & on auroit tort de l'abandonner comme on a accoutumé de le faire. On peut aussi intégrer un grand nombre de différentielles sans avoir recours à la méthode de séparation.

Si l'on avoit , par exemple , l'équation $y dx = x dx - x dy$, cette équation n'est pas intégrable dans l'état où elle est ; mais en transposant le terme $x dy$, elle devient $y dx + x dy = x dx$, dont l'intégrale est $xy = \frac{x^2}{2} + C$. L'équation $y dx =$

$x dx + x dy$ deviendra intégrable en transposant le terme $x dy$ & divisant par x^2 ; car l'on aura $\frac{y dx - x dy}{xx} = \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale est

$$\frac{y}{x} = L. x.$$

Soit l'équation $\frac{2x dy - 2y dx}{(x-y)^2} = dz$, j'ajoute au numérateur deux termes qui se détruisent $2x dx =$

$$2x dx, \text{ \& j'ai } \frac{2x dx - 2y dx - 2x dx + 2y dy}{(x-y)^2}$$

$$= d z. \text{ L'intégrale est donc } \frac{2x}{x-y} = z.$$

Soit la différentielle $x^2 dx^2 + xy dx dy = a^2 dy^2$, en ajoutant de part & d'autre $\frac{y^2 dy^2}{4}$,

$$\text{l'on aura } x^2 dx^2 + xy dx dy + \frac{y^2 dy^2}{4} =$$

$$a^2 dy^2 + \frac{y^2 dy^2}{4}. \text{ Prenant la racine quarrée,}$$

$$\text{il vient } x dx + \frac{y dy}{2} = \frac{dy}{2} \sqrt{4aa + y^2}.$$

L'intégrale du premier membre est facile à trouver, & celle du second se trouve par les séries.

Si l'on avoit l'équation $x^2 dy + 2xy dy + y^2 dy = b^2 dx$, en ajoutant $b^2 dy$ de part & d'autre, l'on auroit $x^2 dy + 2xy dy + y^2 dy + b^2 dy = b^2 (dx + dy)$; donc en divisant,

$$dy = \frac{b^2 (dx + dy)}{(x+y)^2 + b^2} = \frac{b^2 dz}{z^2 + b^2} \text{ (en faisant } x + y = z \text{)}$$

L'intégrale du second membre de cette équation est un arc de cercle dont le rayon $= b$ & la tangente $= z = x + y$.



DE LA DEMI-SÉPARATION DES INDÉTERMINÉES
ET DE QUELQUES AUTRES MÉTHODES
DE CALCUL INTÉGRAL.

134. Nous ne connoissons point de méthode générale pour séparer les indéterminées dans une équation donnée, lors même que cette séparation est possible, soit en la rendant homogène, ou sans la rendre homogène. Pour la rendre homogène, on peut essayer d'égaliser une des variables ou même une fonction de deux variables à une fonction d'une nouvelle variable avec des exposans indéterminés qu'on détermine dans la suite par la condition que la transformée doit être homogène.

La méthode de la demi-séparation est due au Comte Jacques Ricati. Dans cette méthode, on distribue l'équation de manière qu'il en résulte une espèce de demi-séparation, en rejetant dans les multiplicateurs ou diviseurs communs, les quantités qui empêchent la séparation; on égale ensuite l'intégrale des termes séparés à une nouvelle variable; & par le moyen de cette substitution on chasse une des indéterminées de l'équation proposée. Après l'opération il arrive souvent que les indéterminées sont séparées dans l'équation résultante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a + x + y} =$

dz , z étant une fonction de y sans x . Le numérateur étant intégrable, je regarde le dénominateur comme un diviseur commun de tous les termes du numérateur, & je suppose $2ydy + xdy + ydx = adu$; donc $y^2 + xy = au$, & $x = \frac{au - yy}{y}$. Donc notre équation de-

viendra $\frac{adu}{a + \frac{au - yy}{y} + y} = dz$, ou $\frac{ydu}{y + u} = dz$; d'où

l'on tire $ydu - u dz = y dz$, ou en divisant par y & prépa-

rant l'équation, $u \left(\frac{du}{u} - \frac{dz}{y} \right) = dz$. Faisons $\frac{dz}{y} = \frac{dt}{t}$, & sera une fonction de y , & l'équation deviendra $u \left(\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} \right) = dz$. Supposons enfin $\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} = \frac{dp}{p}$, l'on aura $L.u - L.t = L.p$, ou $L.\frac{u}{t} = L.p$, ou $\frac{u}{t} = p$, ou $u = p.t$. Mais $u \left(\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} \right) = dz$, & $\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} = \frac{dp}{p}$; donc en substituant, $p.t. \frac{dp}{p} = dz$, ou $t dp = dz$, ou $dp = \frac{dz}{t}$, mais t & z sont des fonctions de y ; donc l'équation est séparée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $-A dy + a B x x dy = x dx$, A & B étant des fonctions quelconques de y sans x , je la dispose ainsi $-A dy = x^2 \cdot \left(\frac{dx}{x} - a B dy \right)$. Faites $a B dy = \frac{dz}{z}$, afin que z soit une fonction de y , il viendra $-A dy = x x \cdot \left(\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z} \right)$. Faisant $\frac{x}{z} = \frac{t}{b}$, & éliminant x , il vient $-A dy = \frac{t^2 z^2 dt}{b b t}$, ou $-\frac{b^2 A dy}{z^2} = t dt$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque A & z sont des fonctions de y .

EXEMPLE III. Soit la formule $-\frac{a^3 dx}{x} + b y dx = a y dy$. Je la prépare de cette manière $y \cdot (b dx - a dy) = \frac{a^3 dx}{x}$ (A). Je suppose maintenant $b dx - a dy = a dz$; donc $b x - a y = a z$, & $y = \frac{b x - a z}{a}$. Substituant

cette valeur de y & celle de $b dx - a dy$ dans l'équation A, l'on trouve $b x dz - a z dz = \frac{a^3 dx}{x}$, ou $b x dz = \frac{a^3 dx}{x} + a z dz$. Je fais $z dz = \frac{a a dt}{t}$ pour avoir $b x dz = a a \left(\frac{a dx}{x} + \frac{a dt}{t} \right)$ (B). Faisant enfin $\frac{a dx}{x} + \frac{a dt}{t} = \frac{a du}{u}$, il vient en intégrant, $a(lx + lt) = a lu$, ou $a L. xt = a L. u$, ou $L. xt = L. u$, ou $xt = u$, & $x = \frac{u}{t}$. Substituant $\frac{u}{t}$ & $\frac{a du}{u}$ à la place de leurs valeurs, l'équation B devient $\frac{b u dz}{t} = \frac{a^3 du}{u}$, ou $\frac{b dz}{t} = \frac{a^3 du}{u u}$; équation dont les indéterminées sont séparées, puisque t est une fonction de z .

EXEMPLE IV. Soit maintenant l'équation $\frac{x x^2 dx + x y dy + y^2 dx}{x^4 + x^2 y^2 + a^4} = \frac{x dx + y dy}{a a \sqrt{(x^2 + y^2)}}$. Le second membre est intégrable, & en faisant $x^2 + y^2 = z z$, il se change en $\frac{dz}{a a}$; de plus cette supposition donne $y dy = z dz - x dx$. Donc en substituant dans le premier membre de l'équation les valeurs de y^2 & de $y dy$, & changeant le second membre en $\frac{dz}{a a}$, l'on aura, toute réduction faite, $\frac{x z dz + z^2 dx}{z^2 x^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$. Pour préparer cette équation on l'écrira ainsi $\frac{z}{z^2 x^2 + a^4} \cdot (x dz + z dx) = \frac{dz}{a^2}$. Je fais $x dz + z dx = a dt$, & en intégrant, $x z =$

est ; donc $x = \frac{at}{z}$; donc en éliminant x , l'équation préparée devient $\frac{z dt}{at^2 + a^3} = \frac{dz}{a^2}$, ou $\frac{adt}{t^2 + a^2} = \frac{dz}{a}$, dont l'intégrale est $\frac{b}{a} = L. z$, b étant un arc de cercle dont la tangente $= t$ & le rayon $= a$.

135. Parlons maintenant d'un autre artifice dont se sert Jean Bernouilli dans les actes de Léipfic 1697, en faisant une des variables de l'équation égale au produit de deux autres variables indéterminées, (produit qu'on divise par une constante a pour conserver l'homogénéité) : ainsi, par exemple, on suppose $y = \frac{p \cdot q}{a}$, p & q étant deux nouvelles variables. En éliminant y par cette substitution, on détruit quelques termes de l'équation qui en résulte, de manière que l'on puisse séparer les indéterminées dans les termes qui restent.

EXEMPLE I. Soit l'équation $aydy = y^2 dx + x^2 dx$, faites $y = \frac{p \cdot q}{a}$, ayant fait la substitution, on aura une nouvelle équation $a q^2 p dp + a p^2 q dq = p^2 q^2 dx + a^2 x^2 dx$. En supposant égaux les termes $a q^2 p dp$, $p^2 q^2 dx$, l'on aura $\frac{a dp}{p} = dx$, & $a L. p = x$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $a p^2 q dq = a^2 x^2 dx$, ou $p^2 q dq = a x^2 dx$, ou $q dq = \frac{a x^2 dx}{p^2}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque p est une fonction de x .

EXEMPLE II. Soit l'équation $dy = \frac{y x dy}{x x - a a} - \frac{y^2 dx}{x^3}$. En faisant $y = \frac{p \cdot q}{a}$, on aura la nouvelle équation $q dp$

$+p dq = \frac{pqx dx}{xx - aa} - \frac{p^3 q^3 dx}{a^2 x^3}$. Je fais $qdp = \frac{pqx dx}{xx - aa}$, d'où je tire $\frac{dp}{p} = \frac{x dx}{xx - aa}$, & en intégrant, $L.p = L.V(x^2 - aa)$ ou $p = \sqrt{x^2 - aa}$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $p dq = -\frac{p^3 q^3 dx}{a^2 x^3}$, ou $-\frac{a^3 dq}{q^3} = \frac{ap^2 dx}{x^3} = \frac{ax^2 dx - a^3 dx}{x^3} = \frac{a dx}{x} - \frac{a^3 dx}{x^3}$, équation dans laquelle les variables sont séparées.

Mais cette méthode ne réussit que dans les équations dans lesquelles on peut mettre dy dans un seul terme, y dans l'autre terme & y^m dans le troisième terme, m étant un exposant quelconque. On sent bien que ce qu'on dit de y doit s'entendre d'une autre variable pour laquelle on pourroit faire une semblable disposition.

136. Les substitutions sont utiles pour ramener plusieurs équations différentielles à une autre équation dont on fait trouver l'intégrale. Supposons, par exemple, qu'on veuille ramener une équation à l'équation générale $py'' dy + y^{n+1} p' dx + cy^2 p'' dx = 0$, dans laquelle p, p' & p'' sont des fonctions de x sans y & qu'on peut toujours intégrer (128). Si dans cette formule on substitue différentes fonctions de x prises à volonté pour p, p', p'' & qu'on fasse $z = xy$, ou en général $z' = x^r y^s$, r, s étant des exposants arbitraires qu'on détermine ensuite comme on veut, il est évident qu'on trouvera par ce moyen autant d'équations différentielles qu'on voudra, toutes réductibles à la forme générale dont on vient de parler.

* On a supprimé les coefficients a, b, c . Cela ne change rien à la méthode, d'autant plus qu'on peut supposer que ces coefficients entrent dans p, p', p'' .

137. THÉOREME. Si dans l'équation $A(ay^n dy + x^n dx) + B(xdy - ydx) b = 0$, a & b sont des constantes, A & B des fonctions homogenes de x & de y , on pourra toujours ramener cette équation à la formule générale dont on vient de parler en faisant $x = yz$. Si l'on divise l'équation proposée par A , elle devient $(ay^n dy + x^n dx) + b(xdy - ydx) \cdot \frac{B}{A}$. Si l'on substitue dans cette dernière équation yz au lieu de x & $ydz + zdy$ au lieu de dx , il viendra en réduisant, $(a + z^{n+1})y^n dy + y^{n+1}z^n dz - \frac{bB}{A}y^2 dz = 0$; mais B est une fonction homogene que je suppose de la dimension u dans chaque terme de B , des variables x & y ; donc en substituant yz au lieu de x , l'on aura $B = y^u Z$, Z étant une fonction de z . Supposons de même que A est une fonction homogene de x & y de la dimension u' , on aura $A = y^{u'} Z'$, Z' étant une fonction de z ; donc $\frac{B}{A} = \frac{y^u Z}{y^{u'} Z'} = y^v Z''$, en faisant $u - u' = v$ & $\frac{Z}{Z'} = Z''$; donc la proposée deviendra $(a + z^{n+1})y^n dy + y^{n+1}z^n dz - by^{v+2}Z'' dz = 0$, qui a la forme requise, puisque $a + z^{n+1}$, z^n , $-bZ''$ sont des fonctions de z .

Soit l'équation $(fx^{-1}y^2 + gy).(x^2 dx + ay^2 dy) + (hx^2y^2 + iyx^3).(xdy - ydx)b = 0$. En la comparant avec celle du théorème, on trouve $n = 2$, $A = fx^{-1}y^2 + gy$, $B = hx^2y^2 + iyx^3$; & en faisant $x = yz$, on aura $A = y \frac{f+gz}{z} = y^u Z'$; donc $u = 1$ & $Z' = \frac{f+gz}{z}$. On trouvera aussi $B = y^u Z = y^4(hz^2 + iz^3)$; donc $u = 4$ & $Z = hz^2 + iz^3$. Donc $v = u - u' = 3$ & $Z'' = \frac{hz^3 + iz^4}{f+gz}$; & l'équation transformée

formée sera $(a+z^3) y^2 dy + y^3 z^2 dz + by^5 x \left(\frac{hz^3 + iz^4}{f+gz} \right) dz = 0$.

138. THEOREME. Si dans l'équation $ax^n dx + by^n dy + (x dy - y dx) \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) = 0$, les quantités A & B sont des fonctions homogenes de x & de y , de même ou de différentes dimensions entr'elles, ou dont la différence des dimensions est k , k étant $= 0$ ou un nombre quelconque, C & D étant aussi des fonctions homogenes telles que la différence des dimensions de C sur D soit $= n - 1$, on pourra toujours réduire cette équation à la forme du N°. (128), en faisant $x = yz$. L'on aura $dx = y dz + z dy$. Substituant ces valeurs de dx & de x dans l'équation proposée, elle deviendra $az^n + y^n dy + ay^{n+1} z^n dz + by^n dy - y^2 dz \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) = 0$. Or A, B, C, D étant des fonctions homogenes de x & de y , telles qu'on l'a supposé, l'on aura $\frac{A}{B} = y^k P$, P étant une fonction de z , & $\frac{C}{D} = y^{n-1} P'$, P' étant encore une fonction de z ; donc $-y^2 dz \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) = -y^{k+2} P dz - y^{n+1} P' dz$, & l'équation transformée sera $(az^n + 1 + b) y^n dy + (az^n - P') y^{n+1} dz - y^{k+2} P dz = 0$, qui a la forme requise.

EXEMPLE. Soit l'équation $ax^7 dx + by^7 dy + (x dy - y dx) \cdot \left(x^2 + y^2 + \frac{x^3 y + y^3 x}{x^3 + y^3} \right) = 0$. En la comparant avec celle du théorème, l'on trouve $n = 7$, $\frac{A}{B} = x^2 + y^2$, $\frac{C}{D} = \frac{x^3 y + y^3 x}{x^3 + y^3}$, $k = 2$ & $9 - 3 = 6 = n - 1$, selon les conditions requises. En substi-

tuant zy au lieu de x , réduisant & arrangeant les termes, l'on aura $(az^3 + b)y^7 dy + y^8 \left(az^7 - \frac{z^8 + z}{z^3 + 1} \right) dz - y^4 (z^2 + 1) dz = 0$, équation qui a la forme qu'on demande, & qu'on rendra plus simple en la divisant par y^4 .

139. PROBLÈME. Étant donnée l'équation à quatre termes $ax^m dx + by^p x^n dx + cy^q dx - dy = 0$, la réduire à trois termes, pour l'intégrer ensuite par le problème du N°. 130. En faisant $y = x^b z$, & substituant au lieu de y & de dy les valeurs que donne cette supposition, la proposée devient $ax^m dx + bz^p x^{b p + n} dx + cz^q x^{b q} dx - h z x^{b-1} dx - x^b dz = 0$, équation de cinq termes qu'on peut réduire à trois, en supposant que deux termes se détruisent; mais la supposition de deux termes égaux à 0, ne doit pas conduire à une absurdité. Supposons $bz^p x^{b p + n} dx - h z x^{b-1} dx = 0$, l'on aura $p = 1$, $h p + n = h + n = h - 1$, ou $n = -1$, & $b = h^*$, ce qui réduit l'équation proposée à celle-ci $ax^m dx + byx^{-1} dx + cy^q dx - dy = 0$, qu'on ramène à l'équation de trois termes $ax^m dx + cz^q x^{b q} dx - x^b dz = 0$ ou (en divisant par x^b & transposant) à l'équa-

* Ainsi si dans la proposée l'on a $p = 1$, & $n = -1$, on pourra facilement la réduire à trois termes en faisant $y = x^b z$.

tion $dz = ax^{m-b} dx + cz^{b, -b} dx$, en faisant $y = x^b z$.

Si dans cette équation $m = bs$, l'on a, en substituant cette valeur & divisant par $a + cz$, $x^{m-b} dx = \frac{dz}{a + cz}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées ; si on a $s = 2$, la dernière équation aura la forme de celle de Ricati.

Avant de passer à d'autres méthodes nous allons résoudre un problème qui peut être utile dans certains cas.

140. PROBLÈME. Soit l'équation différentielle $dy + y p dx + y^2 p' dx + p'' dx = 0$, p, p', p'' désignant des fonctions de x sans y , étant données deux valeurs de y en x , qui satisfassent à l'équation proposée, c'est-à-dire, la rendent égale à 0, trouver le facteur qui doit la rendre intégrable. Soient m & n les fonctions de x qui, substituées au lieu de y , rendent la proposée $= 0$; en substituant successivement m & dm , n & dn au lieu de y & de dy , l'on aura $dm + m p dx + m^2 p' dx + p'' dx = 0$, & $dn + n p dx + n^2 p' dx + p'' dx = 0$. Soit $\frac{y-m}{y-n} = z$, ou $y = \frac{m-nz}{1-z}$;

si l'on substitue les valeurs de y & de dy que donne cette supposition dans l'équation proposée, qu'on multiplie par $(1-z)^2$, & que dans le résultat on substitue les valeurs de dm, dn que donnent les deux équations précédentes, on aura en réduisant & préparant l'équation, $p' z dx (m-n)^2 + (m-n) dz = 0$, ou en divisant par $(m-n) z$,

& transposant , $\frac{dz}{z} = -p'(m-n) dx$; & en intégrant, $L.z = -S.p'(m-n)dx = -S.(m-n)dx$ L.e, (e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$) , ou $z = e^{-S.p'(m-n)dx}$. Ainsi l'intégrale de l'équation $p'z dx (m-n)^2 + (m-n)dz = 0$, ou $p' dx . (m-n) + \frac{dz}{z} = 0$, est $e^{S.p'(m-n)dx} + \frac{y-m}{y-n} = C$, en substituant la valeur de z .

Si l'on fait attention maintenant qu'après les substitutions l'équation proposée a été multipliée par $(1-z)^2$, & divisée par $(m-n).z$, il est évident qu'en multipliant tout d'un coup par $\frac{(1-z)^2}{(m-n)z} = \frac{m-n}{(y-n)(y-m)}$, à cause de $z = \frac{y-n}{y-m}$, l'équation proposée sera intégrable. On peut voir par la solution de ce problème qu'ayant des intégrales particulières des équations de la forme proposée, on peut en trouver l'intégrale générale. Si $p = 0$, l'on aura l'équation de Riccati qui n'est qu'un cas particulier de notre équation, au reste nous traiterons plus au long des intégrales particulières des équations différentielles.

141. PROBLÈME. Intégrer l'équation $x = yP + M$, dans laquelle P & M sont des fonctions quelconques de z ou de $\frac{dx}{dy}$. En différentiant l'équation proposée, l'on a $dx = P dy + y dP + dM = z dy$; puisque l'équation $z = \frac{dx}{dy}$,

donne $dx = z dy$. Donc $P dy - z dy + y dP + dM = 0$, & $dy + \frac{y dP}{P - z} + \frac{dM}{P - z} = 0$. Puisque P & M sont des fonctions de z , l'on pourra supposer $\frac{dP}{P - z} = V dz$, $\frac{dM}{P - z} = V' dz$, V & V' étant des fonctions de z . Ainsi l'équation se réduira à cette forme $y^0 dy + y^1 V dz + y^0 V' dz = 0$, qui a les conditions requises (128); & supposant $L.e = 1$, & C une constante quelconque, on trouvera aisément, par le N°. cité, l'intégrale $y e^{S.V dz} + S.(V' dz . e^{S.V dz}) = C$; donc $y = \frac{C - S.(V' dz . e^{S.V dz})}{e^{S.V dz}}$. L'on aura

donc la valeur de y en z , & substituant la valeur de dy prise de cette équation dans l'équation $dx = z dy$, l'on aura $x = S.z dy$, & $S.z dy$ ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une seule variable.

142. Il arrive assez souvent que par la substitution de z au lieu de $\frac{dy}{dx}$, ou de $z dx$ au lieu de dy , on parvient à des équations finies & même algébriques entre x & y sans employer les méthodes ordinaires d'intégration.

Si l'on avoit l'équation $y dx - x dy = a^3 \sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)}$, en supposant $dy = z dx$ & faisant disparaître dx par la division, on trouve $y - zx = a^3 \sqrt[3]{(1 + z^3)}$ (B). Différentiant cette équation, substituant la valeur de dy , transposant, réduisant & divisant par dz , il vient x

$= \frac{-a z^3}{\sqrt[3]{(1+z^3)^2}}$. Substituant cette valeur dans

l'équation B, on en tirera $y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+z^3)^2}}$ (D);

donc $x^3 + y^3 = \frac{a^3(1-z^6)}{(1+z^3)^2} = -a^3 + \frac{2a^3}{1+z^3}$;

donc $\frac{1}{1+z^3} = \frac{a^3 + x^3 + y^3}{2a^3}$. En substituant cette

valeur de $\frac{1}{1+z^3}$ dans l'équation D, on trouvera, après les opérations ordinaires, $4a^3 y^3 = (a^3 + x^3 + y^3)^2$.

143. THÉORÈME. Si on multiplie ou si on divise une différentielle quelconque, par une fonction de son intégrale, le résultat sera une différentielle, dont l'intégrale ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une seule variable. Soit dp une différentielle quelconque, dont l'intégrale $= p^*$, & p' une fonction de p , il est évident que le produit $p' dp$ & le quotient $\frac{dp}{p'}$ seront des différentielles à une seule variable p ; donc les intégrales $S. p' dp$, $S. \frac{dp}{p'}$ se trouveront la première par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée perpendiculaire $= p'$ & l'abscisse $= p$, &

* Quelque nombre d'inconnues que puisse renfermer p , on peut considérer cette quantité comme une seule inconnue.

la seconde par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée $\equiv \frac{1}{p'}$ & l'abscisse $\equiv p$.

144. THÉORÈME. L'équation $p' dp - d(p' y z) \equiv -y. d.(p' z)$ est intégrable lorsque l'intégrale du premier membre $S. p' dp - p' y z$ est égale à une fonction du produit de y par une fonction de $p' z$. Soit $m(p' z)$ cette fonction de $p' z$, $n(y m(p' z))$ une fonction du produit $y. m(p' z)$. En considérant $y. m(p' z)$ comme une seule inconnue x , & la quantité $S. p' dp - p' y z$ comme une autre inconnue t , on aura $t \equiv n x$; donc $x \equiv \frac{1}{n} t \equiv q t$ (q étant une fonction de t comme il suit de la nature des équations) $\equiv q(S. p' dp - p' y z)$; donc on aura $q(S. p' dp - p' y z) \equiv y. m.(p' z)$. Donc en divisant les deux membres de l'équation proposée par des quantités égales, on aura $\frac{p' dp - d(p' y z)}{q(S. p' dp - p' y z)} \equiv \frac{-y. d(p' z)}{y. m(p' z)} \equiv \frac{-d(p' z)}{m(p' z)}$, équation dont chaque membre est une différentielle divisée par une fonction de son intégrale; c'est pourquoi cette équation sera intégrable, & par conséquent la proposée le sera aussi.

COROLLAIRE. L'équation $p dx - d.(p y z) \equiv -y. d.(p z)$, p étant une fonction de x ; est intégrable lorsque $S. p dx \equiv a y p z + b y p^b z^b$, a, b, h étant constantes: car en ajoutant $-y p z$ de part & d'autre, l'on parviendra aisément à l'équation $S. p dx - y p z \equiv y(a p z - p z +$

$$b(pz)^b) = y \cdot m(pz). \text{ On aura donc } \frac{pdx - d.(pyz)}{S.pdx - pyz} = \frac{-y.d.(pz)}{y.m.(pz)} = \frac{-d.(pz)}{m.pz};$$

& en intégrant, $L. (S.pdx - pyz) = S. \frac{-d(pz)}{m(pz)} + C.$

Supposons que les deux équations du corollaire soient $x^{\frac{1}{2}} dx - d.(yx^{\frac{1}{2}}z) = -y.d.(yx^{\frac{1}{2}}z),$
& $\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} = yx^{\frac{1}{2}}z + 2yx^{\frac{1}{2}}z = 3yx^{\frac{1}{2}}z,$
ce qui donne $a = 1 = h, b = 2, p = x^{\frac{1}{2}}.$

L'intégrale du corollaire sera $L. (\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z)$

$$= S. \frac{-d.(x^{\frac{1}{2}}z)}{2x^{\frac{1}{2}}z} + C = -\frac{1}{2} L. x^{\frac{1}{2}}z +$$

$L. f$ (en faisant $C = L. f$, ce qui est permis) =

$$L. f (x^{\frac{1}{2}}z)^{-\frac{1}{2}} = L. \frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}}; \text{ donc en repa-}$$

sant des logarithmes aux nombres, $\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} -$

$$yx^{\frac{1}{2}}z = \frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f}{x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}}; \text{ donc } \frac{2}{3} x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{3}{2}}$$

$= yx^{\frac{1}{4}}z^{\frac{3}{2}} = f.$ Si on substitue dans cette

équation la valeur de z prise de l'équation $\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} =$

$$3yx^{\frac{1}{2}}z, \text{ on aura } \frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} \sqrt{\frac{2x}{9y}} = yx^{\frac{1}{4}}x$$

$\sqrt{\frac{8x^3}{7+9y^2}} = f$, équation par le moyen de laquelle on peut trouver la valeur de y en x , ou celle de x en y .

145. PROBLÈME. Trouver les intégrales des deux équations $dx + (ax + by) dt = 0$, $dy + (hx + fy) dt = 0$. Multipliant la seconde équation par un facteur constant & indéterminé p , & l'ajoutant ensuite à la première, il vient $dx + p dy + ((a + hp)x + (b + fp)y) dt = 0$. Il faut faire en sorte que dans cette équation le multiplicateur de dt devienne un multiple de $x + py$ intégrale des autres termes de l'équation, afin qu'ayant supposé $x + py = u$, & m étant une constante indéterminée, l'équation prenne la forme $du + m u dt = 0$, ou $\frac{du}{u} + m dt = 0$, équation dans laquelle les variables sont séparées. On aura donc par cette supposition $ax + hp x + by + fp y = mx + mpy$, & en comparant terme à terme, les deux membres de cette équation, $ax + hp x = mx$, & $by + fp y = mpy$, d'où l'on tire $m = a + hp$, $m = \frac{b + fp}{p}$; donc $a + hp = \frac{b + fp}{p}$, ou $ap + hpp = b + fp$. Si l'on considère p comme une inconnue, l'on trouvera en résolvant cette équation du second degré, deux valeurs de p . Nous représenterons l'une de ces valeurs par p & l'autre par p' . Mais l'équation $x + py = u$, donne $du = dx + p dy$, & de plus nous avons $m = a + hp$; donc l'équation $du + m u dt = 0$,

devient $du + (a + hp)u dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + hp) dt$; donc en intégrant & ajoutant une constante $C' = L.g$, on aura $L.u = L.g - t(a + hp) = L.g - t(a + hp) \cdot L.e$ (en faisant $L.e = 1$) $= L. \frac{g}{e^{t(a+hp)}}$; donc $u = g e^{-t(a+hp)}$. En employant les deux valeurs de p , on aura $x + py = u$, & $x + p'y = u'$, $u = g e^{-t(a+bp)}$ (A), & $u' = g' e^{-t(a+bp')}$ (B). La première équation donne $x = u - py$. Si l'on en retranche la seconde, on trouvera facilement $y = \frac{u - u'}{p - p'}$; donc $x = u - py = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$. Substituant dans ces valeurs de y & de x , les valeurs de u & de u' que donnent les équations A & B, on déterminera les constantes g & g' par les valeurs que x & y doivent avoir lorsque t est égale à 0, ou à une quantité donnée. Si l'équation qui doit donner les valeurs de p & qu'on trouvera facilement devoir être $h p p' + a p - f p - b = 0$, ne donne pas deux valeurs de p , ce qui arrivera si $h = 0$, ou $b = 0$, & dans le cas où les deux valeurs de p seront égales, voici comment on pourra s'y prendre. 1°. Si $b = 0$, une des valeurs de p est 0, & l'autre $= \frac{f-a}{h}$. Ainsi dans les formules précédentes on fera $p' = 0$. 2°. Si $h = 0$, la seconde équation proposée fera $dy + f y dt = 0$, ou $\frac{dy}{y} = -f dt$, d'où l'on tire $y = n e^{-f t}$, n étant une constante; donc y sera

une fonction de t que nous désignerons par q , & substituant cette valeur de y dans la première équation, l'on a $dx + ax'dt + bq'dt = 0$, équation qui se réduit à la formule du N°. 128 & qu'on intègre facilement. Si les deux valeurs de p sont égales, on aura toujours l'équation $x + py = u$, ou $x = u - py = g e^{-t[a+bp]} - py$. Substituant cette valeur de x dans la seconde équation proposée, on trouvera $dy + (f - hp)ydt + h g e^{-t[a+bp]} dt = 0$, équation qui se réduit encore à la formule ci-dessus (128). Enfin si p & p' étoient imaginaires, le problème se résoudroit de la même manière. Car les quantités imaginaires se réduisent toujours à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, & si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires disparaîtroient.

Si les équations étoient $dx + (ax + by)Tdt + Ndt = 0$, $dy + (hx + fy)Tdt + N'dt = 0$, T , N , N' étant des fonctions de t , ou 0, on multiplieroit la seconde par la constante p , & ajoutant le produit à la première, on auroit $dx + p dy + ((a + hp)x + (b + fp)y)Tdt + (N + pN')dt = 0$. Faisant ensuite $x + py = u$, & $(a + hp)x + (b + fp)y = mx + mpy$, on trouvera comme ci-devant, $m = a + hp = \frac{b + fp}{p}$; d'où l'on tirera l'équation $hpp + ap - fp - b = 0$; qui donnera deux valeurs de p , qu'on représentera par p & p' , & l'on aura $du + (a + hp)uTdt + (N + N'p)dt = 0$, équation qu'on intègre comme la précédente par le N°. (128); & l'on trouvera les va-

leurs de y & de x , dans lesquelles on mettra pour u & u' leurs valeurs trouvées par le N°. (128).

146. REMARQUE. Si les deux dernières équations contenoient la première le terme $a' dy$, la seconde le terme ndx , on multiplieroit de même la seconde par p pour l'ajouter à la première, dans la somme l'on supposeroit $(1 + np)x + (a' + p)y = u$ $(a + hp)x + (b + fp)y = m(1 + np)x + m(a + p)y$, & l'on auroit l'équation $du + muT dt + (N + pN')dt = 0$, & l'on feroit le reste comme dans le cas précédent, en se servant de la valeur de $u = (1 + np).x + (a' + p).y$, au lieu de $u = x + ay$. Si les quantités dx & dy étoient multipliées par des constantes, la solution ne seroit pas plus difficile & d'ailleurs on peut les faire disparaître en divisant chaque équation par le coefficient du premier terme.

147. PROBLÈME. Intégrer les trois équations $dx + (ax + by + cz) dt = 0$; $dy + (hx + ky + lz) dt = 0$; $dz + (mx + ny + rz) dt = 0$. Multipliant la seconde par une constante A , la troisième par la constante B , A & B sont des indéterminées, & prenant ensuite la somme des trois équations, l'on aura $dx + A dy + B dz + ((a + Ah + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Br)) dt = 0$. En supposant ensuite $x + Ay + Bz = u$, & faisant le multiplicateur de dt égal à Mu , M étant une constante, l'on aura $du + Mudt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -M dt$, ou en intégrant, $L.u = -Mt + L.g. = L.g - Mt.L.e$, ou $u = ge^{-Mt}$. De plus on aura par supposition, $Mu = Mx +$

$MAy + MBz = (a + Ah + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Br)z$.
 Egalant les termes homologues de cette dernière équation, l'on aura $M = a + Ah + Bm$, $MA = b + Ak + Bn$, $MB = c + Al + Br$; d'où l'on tire les deux équations $a + Ah + Bm = \frac{b + Ak + Bn}{A} = \frac{c + Al + Br}{B}$. Prenant la valeur de

B dans la première de ces deux équations & la substituant dans la seconde, on aura, après les réductions ordinaires, une équation du troisième degré qui donnera trois valeurs de A .

Cela posé en désignant par p, p', p'' ces trois valeurs de A , par q, q', q'' les trois valeurs correspondantes de B , par f, f', f'' les valeurs correspondantes de M , au lieu de l'équation $u = ge^{-Mt}$, on aura ces trois équations $u = ge^{-ft}$, $u' = g'e^{-f't}$, $u'' = g''e^{-f''t}$, & au lieu de l'équation $x + Ay + Bz = u$, on aura les trois équations $x + py + qz = ge^{-ft}$, $x + p'y + q'z = g'e^{-f't}$, $x + p''y + q''z = g''e^{-f''t}$; de ces trois équations l'on tirera les valeurs de x, y, z , & l'on déterminera g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z , lorsque t est $= 0$, ou est égal à une constante donnée.

Si l'équation en A n'a pas trois racines inégales, comme on l'a supposé, on pourra toujours pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le problème, au cas ci dessus (146). Car soit p, q, f , les valeurs respectives de A, B, M , l'équation $x + Ay + Bz = u = ge^{-Mt}$, deviendra $x + py + qz = ge^{-ft}$. Faisant évanouir par cette dernière équation la variable z ,

on réduira les trois équations données à deux équations de la forme de celles du N°. (146). Mais si l'équation en A n'avoit aucune racine, parce que les coefficients qui affectent les différentes puissances de A seroient tous égaux à 0, dans ce cas si le terme tout connu de l'équation s'évanouit aussi, c'est une marque qu'on peut donner à A telle valeur qu'on voudra. Si ce terme ne s'évanouit pas, on augmentera ou on diminuera à volonté le coefficient a ou b , &c. d'une quantité infiniment petite pour rétablir un des termes de l'équation, & l'on trouvera du moins par la méthode du quarré algébrique, une valeur de A qui résoudra le problème.

En général quelque soit le nombre des équations $dx + a dy + c dz$ &c. $+ (fx + kz + \text{\&c.}) dt + N dt = 0$, $dx + a' dy + c' dz$ &c. $+ (f'x + h'y + k'z + \text{\&c.}) dt + N' dt = 0$, &c. qui contiennent autant de variables que l'on voudra, pourvu qu'elles soient de cette forme, ou qu'elles y soient réductibles & que l'on ait autant d'équations que de variables, en multipliant chacune de ces équations par des constantes indéterminées, prenant ensuite leur somme, en supposant $= du$ la somme des termes du résultat qui contiennent les différentielles dx , dy , dz , &c. & faisant le multiplicateur de dt $= mu$, u étant l'intégrale du premier terme, elles se réduiront à une équation $du + mu dt + (T + T' + \text{\&c.}) dt$

* Il s'agit de dt pris dans le second terme de l'équation en prenant pour un seul terme la somme de ceux qui contiennent les différentielles dx , dy , &c. & pour un autre terme tous ceux qui contiennent les variables x , y , &c. & qui sont multipliés par dt .

$= 0$, T , T' , &c. étant des fonctions de t , ou 0 . Or cette équation est intégrable par la méthode ci-dessus (128).

REMARQUE. Si on avoit un nombre n d'équations renfermant le nombre $n + 1$ de variables, en multipliant toutes ces équations, excepté la première, respectivement par des facteurs m , m' , m'' , &c. qu'on supposeroit être des fonctions indéterminées de ces variables, on ajouteroit les produits à la première équation, & multipliant la somme par un facteur p qu'on supposeroit être une fonction des mêmes variables, on supposeroit que le résultat est une différentielle complete.

Si l'on avoit les deux équations $a dx + b dy + c dz = 0$, $a' dx + b' dy + c' dz = 0$, a , a' , b , b' , c , c' étant des fonctions de x , y , z , ces fonctions peuvent aussi renfermer des constantes; multipliant la seconde par m , ajoutant le produit à la première, & multipliant ensuite par p , on trouveroit $p(a + a'm) dx + p(b + b'm) dy + p(c + c'm) dz = 0$. Pour que cette équation soit complete, il faut (par le N°. 89) qu'on ait les trois équations

$$\frac{d(p.(a + a'm))}{dy} = \frac{d(p.(b + b'm))}{dx};$$

$$\frac{d(p.(a + a'm))}{dz} = \frac{d(p.c + c'm)}{dx};$$

$$\frac{d(p.b + b'm)}{dz} = \frac{d(p.(c + c'm))}{dy}, \text{ ou}$$

$$\frac{dp}{dy}(a + a'm) + p \cdot \frac{d(a + a'm)}{dy} = \frac{dp}{dx} x$$

$$\begin{aligned}
 & (b + b'm) + p \cdot \frac{d(b + b'm)}{dx} ; \frac{dp}{dz} (a + a'm) \\
 & + p \frac{d(a + a'm)}{dz} = \frac{dp}{dx} (c + c'm) + \\
 & p \frac{d(c + c'm)}{dx} ; \frac{dp}{dz} (b + b'm) + p \cdot \frac{d(b + b'm)}{dz} \\
 & = \frac{dp}{dy} (c + c'm) + p \cdot \frac{d(c + c'm)}{dy} . \text{ Si en re-} \\
 & \text{gardant } \frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dz} \text{ comme deux inconnues, on} \\
 & \text{substitue dans la première équation leurs valeurs} \\
 & \text{prises dans les deux dernières, on trouvera, toute} \\
 & \text{réduction faite, } (c + c'm) \cdot \left(\frac{d(a + a'm)}{dy} - \right. \\
 & \left. \frac{d(b + b'm)}{dx} \right) + (a + a'm) \cdot \left(\frac{d(b + b'm)}{dz} - \right. \\
 & \left. \frac{d(c + c'm)}{dy} \right) + (b + b'm) \cdot \left(\frac{d(c + c'm)}{dx} - \right. \\
 & \left. \frac{d(a + a'm)}{dz} \right) = 0, \text{ équation indépendante de } p.
 \end{aligned}$$

On cherchera donc pour m une fonction de x, y & z la plus générale qu'il soit possible, & qui puisse satisfaire à cette équation, & supposant qu'on ait trouvé m , on cherchera pour p une fonction des variables x, y, z qui satisfasse à deux quelconques des trois équations ci-dessus qu'on a trouvées d'abord.



DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES.

148. *L'intégrale particulière d'une équation différentielle* est un rapport des variables qui satisfait à l'équation, & qui ne contient aucune nouvelle constante, au lieu que l'intégrale générale contient une constante indéterminée qui ne se trouve pas dans l'équation différentielle s'il s'agit d'une équation du premier ordre. L'intégrale finie & complète d'une équation de l'ordre m doit contenir un nombre m de constantes arbitraires. Voyez le (N°. 77). Il est souvent facile de trouver une intégrale particulière comme en devenant. Par exemple, si l'on avoit l'équation $aady + ydy = aadx + xydx$, il seroit facile de voir qu'on satisfait à cette équation en faisant $x = y$. Ce rapport qui ne renferme ni la constante a qui se trouve dans la différentielle, ni une constante indéterminée qui ne s'y trouve pas, ne peut être qu'une intégrale particulière. Souvent l'intégrale particulière peut faire connoître l'intégrale générale. Si l'on fait $y = x + z$, cette supposition, en faisant les opérations ordinaires, changera notre équation en celle-ci $aadz + xzdx + zxdx = 0$, celle-ci, en supposant $z = \frac{a}{u}$, devient $du - \frac{xu dx}{a} = dx$, qui, étant

multipliée par $e^{\frac{-xx}{2a}}$ (on suppose L. $e = 1$) &

ensuite intégrée, donne $u \cdot e^{\frac{-xx}{2a}} = S. e^{\frac{-xx}{2a}} dx$;

ou $u = e^{\frac{x^2}{2aa}} \int e^{-\frac{y^2}{2aa}} dx + C$, en ajoutant une constante. Si l'on suppose $C = \infty$, le premier terme du second membre de l'équation disparoit, & l'on a $u = \infty$ & $z = \frac{aa}{u} = 0$; donc alors $y = x$: ce qui fait voir que l'intégrale particulière doit être contenue dans l'intégrale générale. Si l'on avoit l'équation $a^2 dy + y^2 dx = a^2 dx + x^2 dx$, la relation $x = y$ satisferoit à l'équation; mais en supposant $y = x + z$, on parviendra à une équation qui ne paroîtra pas plus facile à résoudre que la proposée.

Dans la solution d'un problème on n'a besoin que d'une intégrale particulière; ainsi si l'on peut trouver cette intégrale, on résoudra le problème, quoiqu'on ne puisse pas avoir l'intégrale générale de l'équation différentielle qui exprime la nature du problème.

149. Quoiqu'une certaine relation des variables satisfasse à l'équation proposée, cette relation n'est pas toujours une intégrale particulière. Si l'on avoit, par exemple, l'équation $dy =$

$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$, on satisferoit à cette équation en

supposant $xx + yy = aa$; car alors en ôtant la fraction, le premier membre devient $= 0$, il en est de même du second, puisque la différentielle de $(xx + yy)$ doit être $= 0$, différentielle de aa . Or l'intégrale générale de cette équation est $y = C - \sqrt{(aa - xx - yy)}$ qui ne contient pas l'équation $xx + yy = aa$, quelque valeur qu'on donne à C , x & y restant indéterminées. Au reste

les intégrales trouvées par les méthodes ordinaires, ne sont jamais dans ce cas ; c'est-à-dire, que si l'on trouvoit par les méthodes ordinaires, une intégrale $y = ax$ sans ajouter de constante C , cette intégrale seroit une intégrale particulière de l'équation proposée.

150. PROBLÈME. Le rapport $y = x$ satisfaisant à l'équation $ady - adx = dx \sqrt{yy - xx}$, déterminer si ce rapport est une intégrale particulière de l'équation proposée. Qu'on suppose $y = x + p$, p étant une quantité infiniment petite, l'on aura, en négligeant la seconde puissance de p , $\sqrt{yy - xx} = \sqrt{2xp}$. Mais l'équation $y = x + p$ donne $dy = dx + dp$; donc $ady - adx = adx + adp - adx = adp$, & notre équation devient $adp = dx \sqrt{2xp}$, en substituant la valeur de $\sqrt{yy - xx}$. Ainsi $\frac{adp}{\sqrt{p}}$ ou $\frac{adp}{p^{\frac{1}{2}}} = dx \sqrt{2x}$, & en intégrant, $2ap^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{3} x \sqrt{2x} + C$. Maintenant je remarque que p est une quantité infiniment petite par l'hypothèse, & que de quelle manière qu'on détermine C , x restant indéterminé, l'on ne peut supposer p infiniment petit, mais que p pourra être aussi grand que l'on voudra; donc le rapport $y = x$ ne peut être une intégrale particulière de l'équation proposée, & cela arrivera toutes les fois que dans la transformée l'on aura dp divisé par une puissance m de p , ou par p^m , si l'exposant m est plus petit que l'unité. Au contraire si l'on a $\frac{dp}{p^m} = Bdx$, B étant une fonction

de x ou une constante, l'on aura $\frac{1}{(m-1) \cdot p^{m-1}} = C - S. Bdx = C - D$, en faisant $S. Bdx = D$; d'où l'on tire $(m-1)p^{m-1} = \frac{1}{C-D}$, & en supposant $C = \infty$, l'on aura p infiniment petit lorsque m fera > 1 , comme l'hypothèse l'exige.

Si $m = 1$, & qu'on ait l'équation $\frac{dp}{p^m} = Bdx$, alors en faisant $S. Bdx = D$, on trouvera $L. p = L. C + L. D = L. CD$, ou $p = CD$; & en supposant C infiniment petit, l'on aura p infiniment petit, comme cela doit être par supposition.

151. PROBLÈME. Si une certaine relation entre deux variables satisfait à une équation différentielle, déterminer si cette relation est une intégrale particulière ou non. Soit l'équation $A dx = B dy$, A & B étant des fonctions quelconques de x & de y , à laquelle satisfasse le rapport $y = t$, t étant une fonction de x , de manière qu'en substituant t au lieu de y , l'on ait l'équation $A dx - B dy = 0$, ou $A dx = B dy$, ou $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$. Je suppose $y = t + p$, l'on aura $dy = dt + dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$. Si l'on faisoit $p = 0$, l'on auroit $dp = 0$, & l'équation seroit $\frac{dt}{dx} = \frac{A}{B}$. Considérons p comme une quantité infiniment petite, & négligeant les termes qui sont affectés des puissances de p au-dessus de la plus basse, supposons que par la

substitution $y = t + p$, l'équation devienne $\frac{A}{B} = \frac{dt}{dx} + D p^m$; l'équation $\frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$ devant être la même que la précédente, l'on aura $\frac{dp}{dx} = D p^m$, ou $\frac{dp}{p^m} = D dx$. Maintenant il est visible, par ce qu'on vient de dire (150), que $y = t$ sera une intégrale particulière, ou qu'on pourra regarder p comme $= 0$, lorsque m sera $= 1$ ou plus grand que 1. Si au contraire $m < 1$, le rapport $y = t$, ne sera pas une intégrale particulière.

152. PROBLÈME. Le rapport $y = x$ satisfaisant à l'équation $dx (1 - y^m)^n = dy (1 - x^m)^n$, on demande si ce rapport est une intégrale particulière ou non. Supposant $y = x + p$, l'on aura par le binôme de Newton, $y^m = x^m + m x^{m-1} p$, en négligeant les autres termes qui contiennent des puissances de p plus élevées que la première,

$$\& (1 - y^m)^n = (1 - x^m - m x^{m-1} p)^n = (1 - x^m)^n - m n x^{m-1} p (1 - x^m)^{n-1}; \text{ donc l'équation } \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^m)^n}{(1 - x^m)^n} \text{ devient } \frac{dx}{dx} + \frac{dp}{dx} \text{ ou}$$

$$1 + \frac{dp}{dx} = 1 - \frac{m n x^{m-1} p}{1 - x^m}, \text{ ou } \frac{dp}{p} = - \frac{m n x^{m-1} dx}{1 - x^m}; \& \text{ parce que l'exposant de } p \text{ est ici une puissance entière, l'équation } y = x \text{ est certainement une intégrale particulière de la proposée.}$$

153. THÉORÈME. Si l'équation différentielle $A dx + B dy = 0$, étant multipliée par une fonction m de x & de y devient intégrable, le rapport $m = 0$ sera une intégrale particulière, à moins que dans ce cas A ou B ne deviennent infinis. Supposons que u soit un facteur de m , il faut démontrer que l'équation $u = 0$, est une intégrale particulière de l'équation proposée. u étant une certaine fonction de x & de y , on peut, par l'équation $u = 0$, trouver pour la valeur de y , une fonction de u qui donne l'équation $Q dx + R du = 0$ entre x & u ; & en faisant le multiplicateur $m = nu$, l'on aura l'équation $nQ u dx + nR u du = 0$, qui sera intégrable. Maintenant si ni Q , ni R ne sont divisibles par $u = 0$, ni A , ni B ne peut devenir infini, & l'intégrale sera divisible par u . Car soit qu'on intègre le terme $nQ u dx$, en regardant u comme constant, ou le terme $nR u du$ en considérant x comme constant, l'intégrale aura toujours un facteur u , en omettant la constante dans l'intégrale. Ainsi l'intégrale complète aura cette forme $P u = C$, & si l'on fait $C = 0$, $u = 0$ sera une intégrale particulière, excepté dans les cas que Q ou R seroient divisibles par u . Il faut dire la même chose de chaque facteur de m , pourvu que A ou B ne deviennent pas infinis par la supposition de $m = 0$.

REMARQUE. La condition dont on vient de parler est absolument nécessaire : car si l'on a l'équation $\frac{a dx}{y-x} + dy - dx = 0$, qui étant multipliée par $u = y - x$, devient intégrable; l'on aura $y = x + u$, & notre équation sera

$\frac{a dx}{u} + du = 0$, ou $a dx + u du = 0$, & comme la partie $a dx$ n'est pas multipliée par u , l'intégrale $a x + \frac{1}{2} u u$, en négligeant la constante, ne sera pas exactement divisible par u . Si la partie qui contient dx étoit multipliée par u , quoique la partie qui contient du ne le fût pas, cependant l'intégrale seroit divisible par u comme on peut le voir dans la différentielle $u dx + x du$, dont l'intégrale, en négligeant la constante, est $x u$. Ce qui fait voir que si la différentielle $A u dx + B du$ est exacte, pourvu que B ne soit pas divisible par u , l'intégrale, en omettant la constante, sera divisible par u .

154. THÉORÈME. Si l'équation différentielle $A dx + B dy = 0$ devient intégrable en la divisant par une fonction m de x & de y , l'équation $m = 0$ sera une intégrale particulière, à moins qu'en faisant $m = 0$, A ou B ne s'évanouissent. Soit $m = n u$, u étant un facteur de m , il faut démontrer que l'équation $n = 0$, (& l'on doit dire la même chose de chacun des autres facteurs de m), est une intégrale particulière. u étant une fonction de x & de y , on pourra, par cette considération, chasser y pour avoir l'équation $Q dx + R du = 0$; & en divisant celle-ci par nu , on la rendra complète. Il faut donc chercher l'intégrale de $\frac{Q dx}{nu} + \frac{R du}{nu}$, nous supposons que ni Q , ni R ne sont divisibles par u . Si l'on prend l'intégrale dans le premier terme, en considérant u comme constant, l'on a $\frac{1}{u} S. \frac{Q dx}{n}$, en négligeant la const-

tante. Et si l'on prend l'intégrale du second terme, à cause que R n'a point de facteur u , comme nous le supposons, cette intégrale sera une fraction qui contiendra u au dénominateur; donc cette intégrale sera infinie lorsqu'on fera $u = 0$. Si donc l'intégrale est supposée $= V$, elle sera telle qu'elle deviendra infinie, lorsqu'on supposera $u = 0$, & l'intégrale complete étant $V = C$, on satisfera à l'équation $V = C$, en supposant $C = \infty$, & $u = 0$; d'où l'on peut conclure que chaque facteur u de m , donnera une intégrale particulière $u = 0$, à moins qu'en faisant $u = 0$, les quantités A & B , ou Q & R ne s'évanouissent.

DE LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

155. J'entends ici par *construction géométrique d'une équation différentielle*, la méthode de trouver une courbe dont le rapport des coordonnées soit exprimé par l'équation différentielle proposée.

Soit l'équation différentielle $A dx + B dy = 0$, (A & B étant des fonctions de y & de x), on aura $A dx = -B dy$, ou $\frac{A}{B} dx = -dy$. Si l'on multiplie cette équation par $-a$, (a étant une quantité positive prise à volonté, par exemple, un pied), & qu'on fasse $\frac{-A a}{B} = p$, on pourra donner à l'équation précédente la forme $p dx = a dy$; & p étant une fonction de y & de x , l'on aura en

intégrant, $S. p dx = ay$. Donc $y = \frac{S. p dx}{a}$ ou $ay = S. p dx$ est l'équation de la courbe cherchée. Si l'on suppose que $p = \frac{3y^0 x^2}{a}$, l'on aura $S. p dx = \frac{x^3}{a}$

& l'équation de la courbe sera $ay = \frac{x^3}{a}$, ou $a^2 y = x^3$ qui désigne une courbe parabolique. Il faut faire en sorte que les membres de l'équation $p dx = a dy$, soient de même dimension, ce qu'on peut toujours obtenir en divisant ou en multipliant le premier membre par une constante b qu'on supposera égale à l'unité.

Soit $p = \frac{a^2 y^2 x}{ay + x^2}$. Je suppose qu'on ait décrit une infinité de courbes aC, fC' (Fig. 16.) de manière que dans la première aC , l'on prenne $v = g$, quantité constante & que sur chaque abscisse AB , on élève l'ordonnée perpendiculaire BC ; de sorte que l'on ait $BC = \frac{a^2 y^2 x}{ay + x^2} = \frac{a^2 g^2 x}{ag + x^2}$. On

décrira la seconde courbe fC' de la même manière, & en supposant $y = g'$; supposons qu'on ait ainsi décrit une infinité de courbes en donnant successivement à y des valeurs depuis 0 jusqu'à l'infini, de manière que la ligne y soit constante pour chaque courbe, mais différente dans toutes. Cela posé, $p dx$ représentera l'élément de l'aire de la courbe aC , lorsqu'on supposera dans p la quantité $y = g$; mais $p dx$ représentera l'élément de l'aire de la courbe fC' si l'on suppose $y = g'$, &c. Supposons que A soit l'origine des abscisses & qu'en faisant $y = g$, l'on prenne l'aire $A a BC =$

$ay = ag$, on prolongera l'ordonnée BC jusqu'à ce que BM soit $= g = y$; si l'on suppose maintenant $y = g'$, on prendra l'aire $AfC'B'$, & l'on fera le prolongement $B'N = g'$, c'est-à-dire, on fera $B'N$ égale à la valeur de y dans la courbe fC' , & ainsi de même pour toutes les courbes que nous supposons décrites par cette loi sur l'axe AB . Faisant passer une courbe MN par tous les points M , N ainsi déterminés, cette courbe sera la courbe cherchée, & cela arrivera de même, quelque fonction de y & de x que soit p . En effet l'on aura $S. p dx = ay$ (ou en général $S. p dx = z$, z étant une fonction de y , nous supposons qu'on n'ajoute point de constante, mais si l'on veut en ajouter une, il n'y a qu'à la renfermer dans z). Donc si on fait $y = g$, l'on aura $y = BM = \frac{S. p dx}{a}$, & si l'on suppose $y = g'$, l'on aura $B'N = y = \frac{S. p dx}{a}$. Donc la nature de la courbe MN est exprimée par l'équation $S. p dx = ay$, ou $p dx = a dy$. Mais on doit remettre dans p la variable y au lieu de la constante g , qui est le paramètre de la courbe aC .

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS,

156. Un principe très-simple mais très-fécond pour trouver les règles générales du calcul intégral est de choisir une différentielle générale d'un ordre quelconque, de la différentier en supposant la différence d'une des variables constante ou en faisant tout varier, & d'en déduire ensuite les

regles pour réduire cette différentielle à celle d'un ordre inférieur qu'on avoit choisie.

157. Soit $p dx$ la différentielle générale du premier ordre à une seule variable x , dans laquelle on suppose que p est une fonction quelconque de x . En différentiant la proposée, l'on aura $pddx + p' dx^2$ pour la différentielle du second ordre, p' étant encore une fonction de x & $p' = \frac{dp}{dx}$; donc une différentielle du second ordre à une seule variable x avec dx aussi variable, sera intégrable si on peut la réduire à la forme $pddx + p' dx^2$, & si en même tems l'on a $p' = \frac{dp}{dx}$, autrement elle ne sera pas intégrable; si elle donne ces conditions, son intégrale sera pdx .

Soit la différentielle $(ax^2 + b^2x + cx^{-3})ddx + (2ax + b^2 - 3cx^{-4})dx^2$ en la comparant avec la formule générale, on trouve $p = ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, $p' = 2ax + b^2 - 3cx^{-4}$, & $\frac{dp}{dx} = \frac{2axdx + b^2dx - 3cx^{-4}dx}{dx} = 2ax + b^2 - 3cx^{-4} = p'$; donc la différentielle proposée est intégrable & son intégrale est $pdx = (ax^2 + b^2x + cx^{-3})dx$. Si on vouloit l'intégrale de pdx , on trouveroit $\frac{ax^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2} - \frac{cx^{-2}}{2} + C$.

* Si l'on avoit $p' = a^2 + b^2 = x^0(a^2 + b^2)$, p' seroit une fonction de x , mais de dimension nulle.

158. Soit $p d d x + p' d x^2$ la différentielle générale du second ordre à une seule variable x réductible ou non réductible au premier ordre. Si on la différencie en faisant varier x , dx & ddx , on trouvera $p d^3 x + d d x d p + 2 p' d x d d x + d x^2 d p' = p d^3 x + p'' d x d d x + 2 p' d x d d x + p''' d x^3$ (A), en supposant $d p = p'' d x$, & $d p' = p''' d x$, ou $p'' = \frac{d p}{d x}$ & $p''' = \frac{d p'}{d x}$. Ainsi étant proposée une équation du troisième ordre à une seule variable x , on examinera si elle est réductible à la forme A, & en même tems si elle donne les équations $p'' = \frac{d p}{d x}$, $p''' = \frac{d p'}{d x}$; si elle n'a pas ces conditions, elle ne sera pas intégrable, si elle les donne, son intégrale sera $p d d x + p' d x^2$.

Soit la différentielle du troisième ordre $a x^3 d d d x + 3 a x^2 d x d d x + 2 b x^2 d x d d x + 2 b x d x^3$. En la comparant avec la formule générale, on trouve $p = a x^3$, $p'' = 3 a x^2$, $p' = b x^2$, $p''' = 2 b x$. On trouve aussi les égalités $p'' = \frac{d p}{d x}$, $p''' = \frac{d p'}{d x}$; car $\frac{d p}{d x} = \frac{3 a x^2 d x}{d x} = 3 a x^2 = p''$, & $\frac{d p'}{d x} = \frac{2 b x d x}{d x} = 2 b x = p'''$; donc l'équation proposée a les conditions requises, & son intégrale est $p d d x + p' d x^2 = a x^3 d d x + b x^2 d x^2$. On pourroit trouver quelque difficulté dans la comparaison de la différentielle

proposée avec la formule générale : car cette formule étant exprimée ainsi $p d^3 x + (p'' + 2p') dx ddx + p''' dx^3$, & la différentielle proposée de cette manière $ax^3 d^3 x + (3ax^2 + 2bx^2) dx ddx + 2bx dx^3$, on trouveroit d'abord $p = ax^3$ & $p''' = 2bx$. Mais on pourroit être embarrassé à trouver les valeurs de p'' & de p' par l'équation $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$. Cette difficulté disparoît en faisant attention aux équations $p'' = \frac{dp}{dx}$, & $p''' = \frac{dp'}{dx}$ qui doivent avoir lieu lorsque la différentielle est intégrable ou réductible au second ordre : car puisqu'on a déjà trouvé $p = ax^3$, & que l'on doit avoir $p'' = \frac{dp}{dx}$, l'on aura $p'' = 3ax^2$; & par conséquent $2p' = 2bx^2$ & $p' = bx^2$. On peut appliquer ces réflexions à tous les cas.

Si l'on suppose que la seconde différence ddx soit constante, $d^3 x$ sera $= 0$, & la formule générale deviendra $(p'' + 2p') dx ddx + p''' dx^3$, & l'on aura les équations $p''' = \frac{dp'}{dx}$; & $p'' = \frac{dp}{dx}$. Dans cette même supposition la différentielle précédente sera $(3ax^2 + 2bx^2) dx ddx + 2bx dx^3$. En la comparant avec la formule générale, on a $p''' = 2bx$, & $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$, & par l'équation $p''' = \frac{dp'}{dx}$, ou $p''' dx = dp'$, on a $2bx dx = dp'$; donc en intégrant,

$bx^2 = p'$; donc $2p' = 2bx^2$; donc par l'équation $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$, l'on a $p'' = 3ax^2$. Mais $p'' = \frac{d p'}{dx}$, ou $p'' dx = dp'$; donc $3ax^2 dx = dp'$, & $ax^3 = p'$; ainsi l'intégrale de notre équation sera $p dx + p' dx^2 = ax^3 dx + bx^2 dx^2$. Il est facile d'appliquer cette méthode à une différentielle du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé, pourvu qu'il n'y ait qu'une seule variable.

159. On a souvent besoin sur-tout dans les questions de *maximis & minimis*, de supposer une différentielle égale à 0. Lorsque cette différentielle est du premier ordre & ne contient qu'une seule variable x , on peut la représenter par pdx ; si l'on fait $pdx = 0$, on aura en divisant par dx , l'équation $p = 0$, qui fera connoître x . Mais si l'équation différentielle contient des différences des ordres supérieurs, on cherchera si la différentielle qu'on a égalée à 0, est intégrable par la méthode qu'on vient d'expliquer; & on l'intégrera si cela est possible; mais si la méthode ne réussit pas, on la multipliera par un facteur m qu'on supposera être une fonction de x , & l'on tâchera de déterminer m par les conditions requises pour que le produit soit une différentielle exacte.

160. Toutes les équations du second ordre à une seule variable x , sont intégrables par cette méthode: car en multipliant par m l'équation générale du second ordre à une seule variable $pddx + p'dx^2 = 0$, on a $mpddx + mp'dx^2 = 0$. Pour que le premier membre de cette équation soit

une intégrale exacte, selon ce qu'on a dit ci-dessus (157), on doit avoir $m p' d x = d (m p) = m d p + p d m$, & l'intégrale cherchée sera $m p d x = 0$. De l'équation $m p' d x = m d p + p d m$, on tire $\frac{d m}{m} = \frac{p' d x - d p}{p} = \frac{p' d x}{p} - \frac{d p}{p}$, & en intégrant, $L. m = S. \frac{p' d x}{p} - L. p$, ou $L. m + L. p = S. \frac{p'}{p} d x$, $L. m p = S. \frac{p'}{p} d x L. e$ (en supposant $L. e = 1$); donc $p m = e^{S. \frac{p' d x}{p}}$, & $m = \frac{e^{S. \frac{p' d x}{p}}}{p}$; & partant l'intégrale cherchée sera $e^{S. \frac{p' d x}{p}} d x = 0$, & en divisant par $d x$, $e^{S. \frac{p' d x}{p}} = 0$, si on intègre l'équation $e^{S. \frac{p' d x}{p}} d x = 0$, on aura $S. e^{S. \frac{p' d x}{p}} d x = C$ constantes.

Mais il y a une infinité de différentielles à une seule variable & des ordres supérieurs, qu'on ne peut réduire à un ordre inférieur, même en les multipliant par un facteur m .

La différentielle générale du second ordre à une seule variable x , peut facilement se réduire à la forme d'une différentielle du premier ordre à deux variables x & y : car en supposant $d d x = d y$, & par conséquent $d x = y$, & substituant, on changera la différentielle $p d d x + p' d x^2$ en $p d y + p' y d x$. On pourra chercher l'intégrale

de la transformée par les méthodes que nous avons données pour ces sortes d'équations, & en remettant ensuite dx pour y dans cette intégrale, elle deviendra une différentielle du premier ordre à une seule variable x .

La différentielle du troisième ordre à une seule variable x , qu'on peut représenter par la formule $p d^3 x + p' dx dd x + p'' dx^2$ se réduit à une différentielle du second ordre à deux variables x & z en faisant $d^3 x = ddz$, $ddx = dz$ & $dx = z$, ce qui change la proposée en $p ddz + p' dx dz + p'' z dx^2$. Si dans celle-ci on fait $ddz = du$, & $dz = u$, elle deviendra $p du + p' z dz + p'' z^2 dx$, en faisant attention que l'on a $dx = z$. On pourra faire les mêmes raisonnemens pour une différentielle à une seule variable & d'un ordre quelconque qu'on pourra toujours réduire aux ordres inférieurs & même au premier ordre.

161. A & B étant supposés des fonctions de x & de y , la différentielle du premier ordre à deux variables peut être représentée par la formule $A dx + B dy$. En différentiant cette formule, l'on aura $A dd x + dA dx + B dd y + dB dy$, & en supposant que A' , A'' , B' , B'' soient encore des fonctions de x & de y , & que $dA = A' dx + A'' dy$ & $dB = B' dy + B'' dx$, on aura la différentielle générale du second ordre, & à deux variables $A dd x + A' dx^2 + (A'' + B'') dx dy + B dd y + B' dy^2$, qui sera réductible au premier ordre lorsqu'on aura les deux équations de condition $dA = A' dx + A'' dy$, & $dB = B' dy + B'' dx$, & l'on trouvera d'abord les deux termes

$A dd x$

$A d d x$, $B d d y$ de la formule générale, en comparant ceux de la différentielle proposée où se trouvent les différentielles $d d x$, $d d y$; & l'intégrale de la proposée sera $A d x + B d y$. On s'en assurera en différentiant cette intégrale, & l'on doit faire la même chose quand il s'agit des différentielles à une seule variable : car si l'on ne retrouvoit pas la différentielle proposée, la proposée ne seroit pas intégrable, du moins dans l'état où elle est.

Soit l'équation $a x^2 y d d x + 2 a y x d x^2 + (a x^2 + 3 b^2 y^2 x^2) d x d y + b^2 x^3 y^2 d d y + 2 b b x x y d y^2$, en comparant, l'on a $A d d x = a x^2 y d d x$; donc $A = a x^2 y$. L'on trouve de même $B = b^2 x^3 y^2$; & l'intégrale cherchée $A d x + B d y$ est $= a x^2 y d x + b^2 x^3 y^2 d y$. En effet en différentiant cette intégrale, on retrouve la différentielle proposée.

Si dans la différentielle $A d x + B d y$ on avoit supposé $d x$ constant, dans ce cas l'on auroit $d d x = 0$, & la différentielle générale du second ordre en effaçant le terme $A d d x$, deviendroît $A' d x^2 + (A'' + B'') d x d y + B d d y + B' d y^2$. Cette formule sera réductible à une différentielle du premier ordre $A d x + B d x$, lorsqu'on aura les deux équations de condition $d A = A' d x + A'' d y$, & $d B = B' d y + B'' d x$. En comparant la dernière formule générale avec une différentielle proposée dans laquelle $d x$ seroit constant, on trouvera facilement la valeur de B , & par la comparaison du terme $A' d x^2$ avec son correspondant, on aura la valeur de A' . On in-

régrera la différentielle $A'dx$, en regardant x seul comme variable, l'intégrale sera $= A$, & en substituant les valeurs de A & de B dans la différentielle $A dx + B dy$, on aura l'intégrale cherchée, pourvu qu'en différentiant de nouveau, l'on retrouve la différentielle proposée.

Soit la différentielle $2ayxdx^2 + (ax^2 + 3bx^2)dx dy + bx^3ddy$. En la comparant avec la dernière formule générale, on trouve $B' = 0$, c'est-à-dire, on trouve que le terme correspondant au terme $B'dy^2$ manque; on trouve aussi $B = bx^3$ & $A' = 2ayx$; donc $A'dx = 2ayxdx$, & en intégrant dans la supposition de y constant, on trouve $A = ayxx$; donc l'intégrale sera $ayx^2dx + bx^3dy + Cdx$ qui est exacte, car en différentiant cette intégrale, on retrouve la proposée. On ajoute Cdx , parce que ce terme peut avoir disparu en différentiant dans la supposition de dx constant; C est une constante arbitraire qu'on détermine par la nature du problème.

Comme cette matière est très-intéressante, nous croyons devoir encore ajouter quelques observations en faveur des commençans.

Soit V une fonction de deux variables x & y ; de manière que l'on ait $dV = A dx + B dy$ & $ddV = A ddx + 2C dx dy + D dx^2 + E dy^2 + B ddy$. Il est visible qu'on doit avoir les quatre équations de condition $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$, $C = \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$.

Car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (88), si $dV = A dx + B dy$, on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; mais $d^2V = A ddx + dA dx + B ddy + dB dy$. Faisant $dA = D dx + C dy$, & $dB = M dx + E dy$, on aura $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = C$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Mais $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; donc $C = M$, & $dB = C dx + E dy$. Substituant les valeurs de dA & dB , il vient $ddV = A ddx + 2 C dx dy + D dx^2 + E dy^2 + B ddy$.

COROLLAIRE. Donc une différentielle à deux variables dans laquelle on ne suppose aucune différence constante aura une intégrale finie si l'on a les quatre équations de condition dont on vient de parler, & son intégrale du premier ordre sera $A dx + B dy$, en ajoutant une constante.

Si l'on proposoit donc d'intégrer la formule $\frac{ddy}{x} = \frac{2 dx dy}{x^2} + \frac{2 y dx^2}{x^3} = \frac{y ddx}{x^2}$, en comparant cette différentielle avec la formule $A ddx + 2 C dx dy + D dx^2 + E dy^2 + B ddy$ (H), on trouvera $A = -\frac{y}{x^2}$, $D = \frac{2y}{x^3}$, $C = -\frac{1}{x^2}$, $E = 0$, $B = \frac{1}{x}$. Donc $\frac{(dA)}{dy} = -\frac{1}{x^2}$, $dB = -\frac{1}{x^2}$, & $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; $C = -\frac{1}{x^2}$.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}; \quad \frac{(dA)}{dx} = \frac{2y}{x^3} = D;$$

$$\frac{(dB)}{dy} = 0 = E. \text{ Ainsi la proposée a une intégrale finie ; la première intégrale est } A dx + B dy = \frac{-ydx + xdy}{x^2}.$$

A l'égard de la seconde intégrale, il est facile de voir qu'elle est égale à la fraction $\frac{y}{x}$ plus une constante c .

Si une des différentielles dx, dy est supposée constante, dans ce cas l'on aura $ddx = 0$, ou $ddy = 0$; donc on aura, ou A , ou $B = 0$, & par conséquent on ne sauroit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Si l'on suppose $ddx = 0$, & qu'on efface le premier terme dans la formule H, on aura la formule $2Cdx dy + E dy^2 + D dx^2 + B dy$. Mais $\frac{(dA)}{dx} = D$; donc $\frac{(dA) dx}{dx} = D dx$, & S. $D dx = A' + G$, G étant une quantité qui peut contenir une fonction de y , parce qu'on suppose y constant dans $\frac{(dA)}{dx}$. Pour connoître G , on fera attention à l'équation $\frac{(dA)}{dy} = C$, qui indique qu'on doit ajouter à A une quantité G qui donne $\frac{(dA)}{dy} = C$. Si cette équation a lieu sans qu'on soit obligé de rien ajouter à A , dans ce cas on n'ajoutera rien à la

quantité A. On doit ensuite examiner si les trois autres équations ci-dessus peuvent avoir lieu.

Soit proposée la différentielle $2 a d x d y + a x d d y + 2 b d x^2$, comparant cette différentielle avec la formule H, je trouve $D = 2 b$, $C = a$, $E = 0$, $B = a x$. On a donc $S. D d x = 2 b x + G$, mais $\frac{(d A)}{d y} = 0 = C$, ce qui est absurde. Afin donc que $\frac{(d A)}{d y}$ devienne $= C = a$, on doit supposer $G = a y$, & $A = 2 b x + a y$. On a ensuite $\frac{(d B)}{d x} = a = \frac{(d A)}{d y}$, & $\frac{(d B)}{d y} = 0 = E$. Ainsi la différentielle proposée résulte de la différenciation d'une quantité finie. Ajoutant donc à la proposée la quantité $A d d x = (2 b x + a y) d d x$, son intégrale sera $= (2 b x + a y) d x + a x d y + g$ constante.

Il est bon de remarquer que la quantité g doit renfermer $d x$ lorsqu'on a fait cette différentielle constante, mais elle contiendra $d y$ lorsqu'on aura fait $d d y = 0$.

Soit la formule $A d d x + 2 C d x d y + D d x + E d y^2 + B d d y$, dans laquelle on n'ait pas $\frac{(d A)}{d y} = \frac{(d B)}{d x}$. Supposons que l'intégrale de la proposée soit $= A d x + B d y$ (en ajoutant une constante), dont la différentielle $d A . d x + A d d x + B d d y + d B . d y$ (T) doit être égale à

C c 1

la proposée. C'est pourquoi je fais $dA = D dx + N dy$, & $dB = M dx + E dy$; d'où je tire $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = N$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Car dans ce cas l'on ne peut pas faire $N = M$, puisqu'on ne suppose pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Substituant les valeurs de dA & de dB que donnent ces équations dans la formule T, il vient $A ddx + N dy dx + D dx^2 + M dy dx + E dy^2 + B ddy$, quantité qui ne peut être égale à la différentielle proposée qu'autant que l'on aura $M + N = 2C$. Si les deux différentielles ddx , ddy s'y trouvent, l'intégrale sera très-facile à trouver; car pour avoir lieu il suffit qu'on ait $2C = M + N = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$. Si ces équations ont lieu l'intégrale sera $A dx + B dy$.

Mais l'intégration sera bien moins facile si ddx , ou ddy manquent, car alors ou A , ou B ne sont pas constans. Si ddx manque, la différentielle aura la forme $D dx^2 + 2C dy dx + E dy^2 + B ddy$. Mais $2C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$ (P); donc $2C - \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$. Ayant trouvé par le moyen de cette équation la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, l'ayant

multipliée par dy & intégrée dans la supposition de x constant, on aura $A + G$. Mais parce que dans cette intégration on a supposé x constant, il peut se faire que G soit une fonction de x ; c'est pourquoi il faut trouver de nouveau

la valeur de A par l'équation $D = \frac{(dA)}{dx}$, ou $S. D dx = A$, en regardant maintenant x comme variable. Si ces deux valeurs de A ne sont pas les mêmes, on doit les ajouter ensemble, afin d'avoir la valeur de A corrigée. Si $2C$ ne renferme pas $\frac{(dB)}{dx}$, l'équation P de condition n'aura pas lieu.

Enfin l'on doit avoir $E = \frac{(dB)}{dy}$, & alors l'intégrale cherchée sera $A dx + B dy + g dx$ (en écrivant $g dx$ au lieu de g).

Soit proposé d'intégrer la différentielle $2ax dx^2 - bx^2 dy^2 - 2byx dx dy + 2cy dy dx - bx^2 y ddy$, dans laquelle on suppose dx constant, on aura $D = 2ax, -bx^2 = E, 2cy - 2byx = 2C = M + N, -bx^2 y = B$.

Mais $\frac{(dB)}{dx} = -2bxy$; donc le terme $\frac{(dB)}{dx}$ se

trouve renfermé dans $2C$, & de-là $\frac{(dA)}{dy} = 2C$

$-\frac{(dB)}{dx} = 2cy$, & $A = S. 2cy dy + G$

$= cy^2 + G$. Mais $S. D dx = A - ax^2$;

donc $A = ax^2 + cy^2$. Enfin on a $\frac{(dB)}{dy} = -$

$b x^2 = E$; donc l'intégrale cherchée est $(a x^2 + c y^2) dx - b x^2 y dy + g dx$,

Pour faire mieux comprendre aux commençans l'artifice de la méthode que nous venons de développer, soit l'équation $(a + b x^n) x^2 ddy + (c + f x^n) x dx dy + (g + h x^n) y dx^2 = 0$. On aura donc $B = (a + b x^n) x^2$, $(c + f x^n) x = 2 C$; $D = (g + h x^n) y$, & $E = 0$. On trouve à la vérité $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$, ce qui indique qu'on peut donner aux coefficients a, b, c , &c. les valeurs convenables pour rendre la proposée intégrable. Mais l'on a $S. D dx = A = (g x + \frac{h x^{n+1}}{n+1}) y$; ce qui doit donner $2 C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy} = 2 a . x + (n+2) . b x^{n+1} + g x + \frac{h x^{n+1}}{n+1} = c x + f x^{n+1}$. Pour que cette équation ait lieu, il faut qu'on ait $c = 2 a + g$, $f = (n+2) . b + \frac{h}{n+1}$. La substitution étant faite, l'équation proposée devient $(a + b x^n) x^2 ddy + (2 a + g + (n+2) . b x^n + \frac{h x^n}{n+1}) x dx dy + (g + h x^n) y dx^2 = 0$; donc l'intégrale fera $A dx + B dy = (g x + \frac{h x^{n+1}}{n+1}) y dx + (a + b x^n) x^2 dy + C' dx = 0$; dans laquelle si $C' = 0$, il sera facile de séparer les variables,

Si $A dx + B dy = 0$ est susceptible d'une intégrale finie dans l'état où elle se trouve ; c'est-

à-dire si l'on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou

$$g x + \frac{h x^{n+1}}{n+1} = (n+2) \cdot b x^{n+1} + 2 a x ;$$

$$\text{ou } g = 2 a, \frac{h}{n+1} = (n+2) \cdot b, \text{ il ne sera}$$

pas difficile de trouver les valeurs de c & de f , qui étant substituées dans la proposée la rendront susceptible d'une intégrale finie.

Soit $A dx + B dy + D dz$, la différentielle générale du premier ordre & à trois variables A, B, D étant des fonctions quelconques des variables x, y, z . Si l'on différentie cette formule, on trouve $A ddx + dA \cdot dx + B ddy + dB \cdot dy + dD \cdot dz + D ddz$ (H).

Supposons $dA = A' dx + A'' dy + A''' dz$,
(en faisant $A' = \frac{(dA)}{dx}$; $A'' = \frac{(dA)}{dy}$; $A''' =$

$\frac{(dA)}{dz}$), $dB = B' dx + B'' dy + B''' dz$;

(en faisant $B' = \frac{(dB)}{dx}$, $B'' = \frac{(dB)}{dy}$, $B''' = \frac{(dB)}{dz}$) ;

& $dD = D' dx + D'' dy + D''' dz$; il n'est

pas difficile de trouver les valeurs de D', D'', D''' .

Si l'on substitue dans la formule H les valeurs de

* Cette expression marque la différentielle de A prise en faisant varier seulement x & divisant le résultat par dx .

dA, dB, dD , qu'on vient de trouver, il viendra $A ddx + A' dx^2 + (A'' + B') dx dy + (A''' + D') dx dz + B ddy + B'' dy^2 + (B''' + D'') dy dz + D ddz + D''' dz^2$ (P).

Si on suppose une des différentielles constante, on effacera dans la formule P le terme où se trouve la différence de cette différentielle : ainsi si l'on suppose dx constant, l'on aura $ddx = 0$, le terme $A ddx$ disparaîtra, & le reste sera la formule générale convenable à la supposition de dx constant.

Soit la différentielle du second ordre à trois variables avec leurs premières différences aussi variables $ax^3y^2 ddx + 3ay^2x^2 dx^2 + (2ax^3y + bz^2) dx dy + bxz^2 ddy + 2bxz dy dz$. En comparant cette différentielle à la formule P, on trouve $A = ax^3y^2$, $B = bxz^2$ & $D = 0$; donc l'intégrale, s'il y en a une, doit être $A dx + B dy = ax^3y^2 dx + bxz^2 dy$. En effet en différentiant cette intégrale, on trouve la différentielle proposée.

Il est aisé de voir comment on peut trouver des formules générales pour les différentielles des ordres supérieurs, à deux, ou à un plus grand nombre de variables pour en déduire les intégrales des différentielles d'un ordre quelconque.

162. L'on peut aussi en introduisant à la place de la plus haute différentielle de chaque variable une différentielle moins élevée d'une unité, réduire la proposée à une différentielle d'un ordre

inférieur, pour l'intégrer ensuite par les règles qui sont propres à cet ordre.

Soit, par exemple, la différentielle du second ordre $A dx^2 + A' dx dy + B ddy + B' dy^2$, en faisant $ddy = du$, & par conséquent $dy = u$, & $dx = c$ constante, on la réduira à la forme $Ac dx + A' c dy + B du + B' u dy$, différentielle du premier ordre à trois variables. On cherchera par les méthodes ci-dessus l'intégrale de cette différentielle; supposons qu'elle soit trouvée, on y remettra dx au lieu de c , & dy au lieu de u , & l'on aura une différentielle du premier ordre à deux variables x & y qu'on tâchera d'intégrer de même. Si la proposée renfermoit ddx , on feroit $ddx = dz$, ou $dx = z$, & l'on parviendroit encore facilement à une différentielle d'un ordre inférieur. Au reste dans les équations des ordres supérieurs au premier, on peut supposer à volonté une première différence constante, & nous allons donner la méthode de rendre une des premières différences constantes, & réciproquement de rendre variables les premières différentielles dans les équations dans lesquelles on auroit supposé une constante,

Soit $A dx^2 + B dx dy + C dy^2 + ddy = 0$, une équation différentielle du second ordre & à deux variables, dans laquelle la première différence dx est supposée constante. Pour la ramener à une différentielle qui ne renferme aucune différence constante, je divise la proposée par dx afin d'avoir $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} +$

$\frac{D. d(dy)}{dx} = 0$. Il est visible qu'à cause de dx constant, l'on peut mettre $\frac{D. d(dy)}{dx}$ au lieu de $\frac{D. dd y}{dx}$. Si l'on veut que dx soit variable, on aura alors en différentiant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, & l'équation se changera en celle-ci, $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + D. \left(\frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}\right) = 0$, qui n'a aucune différence constante. Si on vouloit faire varier dx & rendre dy constant, on feroit $D d\left(\frac{dy}{dx}\right) = D. \left(-\frac{dy ddx}{dx^2}\right)$, en effaçant le terme $dx ddy$, à cause de $ddy = 0$.

Soit l'équation du troisième ordre $a dx^3 + b dx^2 dy + c dy^2 dx + D dy^3 + e dx ddy + f dy ddy + g d^3 y = 0$, dans laquelle dx est supposé constant. En divisant par dx^2 , l'on trouve $a dx + b dy + \frac{c dy^2}{dx} + \frac{D dy^3}{dx^2} + \frac{e ddy}{dx} + \frac{f dy ddy}{dx^2} + \frac{g d^3 y}{dx} = 0$, qu'on peut écrire ainsi $a dx + b dy + \frac{c dy^2}{dx} + \frac{D dy^3}{dx^2} + e d\left(\frac{dy}{dx}\right) + f. \frac{dy}{dx}. d\left(\frac{dy}{dx}\right) + g. d\left(\left(\frac{1}{dx}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$. Si si dans cette équation on fait tout varier dans

les différenciations indiquées par la lettre d , on aura une équation du troisième ordre sans aucune première différence constante; & si dans les termes affectés du signe de différenciation, on suppose dy constant & dx variable, on aura une équation dans laquelle dy sera constant.

On peut faire les transformations précédentes par le moyen de quelques substitutions qui peuvent être d'un grand usage. Soient x & y les variables de l'équation proposée, on introduira une nouvelle variable p en supposant $p dx = dy$; on fait de plus $q dx = dp$, $r dx = dq$, ou $p = \frac{dy}{dx}$;

$q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c.; dx étant constant.

Si on veut maintenant que dx & dy soient variables, on aura en différenciant, $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$,

& par conséquent en divisant cette valeur de dp par dx & différenciant de nouveau, l'on trouvera $dq = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3 x}{dx^4}$,

& ainsi de suite. Soit, par exemple, la différentielle $\frac{x ddy}{dx^2}$, dans laquelle dx est supposé constant. En faisant $p dx = dy$, $dp = q dx$, elle se change en qx , & en substituant la valeur de q elle devient $= \frac{xdx ddy - xdyddx}{dx^3}$, différentielle qui ne contient plus aucune différence constante.

Soit la différentielle $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ dans laquelle

* L'expression ddx^2 marque le quarré de ddx .

on suppose $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante. En faisant $dy = p dx$ & $dp = q dx$, cette différentielle se réduit à la forme $\frac{(1 + pp)^2}{q}$ & en substituant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p , & $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$ au lieu de q , on aura $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$, expression qui ne renferme aucune différentielle constante. Si on vouloit au contraire rendre constant dx , par exemple, on supposeroit $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c. & l'on effaceroit les termes où se trouveroient ces différentielles. Si on vouloit dans une équation du troisième ordre rendre ddx constant, on effaceroit le terme qui contiendrait d^3x . Si on avoit supposé une différentielle, par exemple, dx constante dans une équation donnée, en la réduisant à une équation dans laquelle il n'y eût aucune différence constante, & faisant ensuite la différentielle de dy égale à 0, on réduiroit la proposée à une différentielle dans laquelle dy seroit constant.

163. Il peut arriver qu'une équation différentielle d'un ordre supérieur & à deux variables soit vague, c'est-à-dire, ne renferme aucun rapport certain entre les variables, ces sortes d'équations sont absurdes & ne peuvent avoir lieu dans la solution d'aucun problème. Etant donnée une équation qui ne renferme aucune variable constante, on supposera dx constant, & on réduira ensuite le résultat à une forme qui ne suppose aucune différence constante. Cela étant fait, on examinera si l'équation qui en résulte s'accorde

avec la proposée. Si cela arrive, l'équation renferme un rapport déterminé entre x & y ; dans le cas contraire ce rapport est vague: car il est visible qu'il est libre de supposer constante telle différentielle que l'on voudra, & qu'en différenciant deux fois de suite, par exemple, dans cette supposition une équation finie entre x & y , le résultat doit donner le même rapport que si l'on avoit supposé toutes les différences variables. Soit l'équation $b d d x + f d d y + g d x^2 + h d y d x + k d y^2 = 0$, qui n'a point de différentielle constante, & dans laquelle b, f, g, h, k sont des fonctions de x & de y . En faisant $d x$ constant, on a $f d d y + g d x^2 + h d y d x + k d y^2 = 0$. Si dans cette équation on substitue la valeur de $d d y$ que donne la supposition de $p d x = d y$, & qu'on fasse attention que $d p = d \left(\frac{d y}{d x} \right) = \frac{d x d d y - d y d d x}{d x^2}$, & qu'alors $d p \cdot d x = d d y = q d x = d d y - \frac{d y d d x}{d x}$, l'on aura (en substituant cette quantité au lieu de $d d y$) l'équation $-\frac{f d y d d x}{d x} + f d d y + g d x^2 + h d y d x + k d y^2 = 0$, qui ne diffère de la proposée que dans le premier terme. Il faut donc voir si l'on a $b = -\frac{f d y}{d x}$. Si cela arrive, l'équation proposée exprimera un rapport déterminé entre x & y , autrement l'équation sera absurde. Il est donc nécessaire, afin que la proposée ne soit pas absurde, que

l'on ait $b + \frac{f dy}{dx} = 0$, ou $b dx + f dy = 0$,
 or cela peut arriver de deux manières, 1°. Si
 l'expression $-\frac{f dy}{dx}$ est identique avec b , c'est-à-
 dire si elle est non-seulement $= b$, mais est ef-
 fectivement b . 2°. Si l'équation $b dx + f dy = 0$,
 est l'équation différentielle du premier degré, qui
 étant différenciée, a donné la proposée: Dans ce
 cas cette équation sera l'intégrale de la proposée.
 On le reconnoîtra en différenciant cette équation;
 car le résultat doit donner la proposée.

Soit l'équation sans aucune différentielle const-
 tante $yy ddx - xx ddy + y dx^2 - x dy^2 +$
 $a dx dy = 0$. En comparant cette équation avec
 la formule générale précédente, on trouve $b = yy$,
 $-xx = f$, & l'équation $b dx + f dy = 0$,
 devient $yy dx - xx dy = 0$. Si l'on différencie
 cette équation & qu'on l'égale à la proposée, on
 trouvera (B) $y dx^2 - x dy^2 + a dx dy =$
 $2y dx dy - 2x dx dy$. Mais l'équation $yy dx$
 $- xx dy = 0$, donne $dy = \frac{yy dx}{xx}$; donc en
 substituant cette valeur de dy dans l'équation B,
 & divisant ensuite par dx^2 , il viendra $y -$
 $\frac{y^4}{x^3} + \frac{a yy}{xx} = \frac{2y}{xx} - \frac{2yy}{x}$, ou $x^3 - y^3 +$
 $axy = 2xyy - 2xxy$ (A). Voyons mainte-
 nant si cette équation s'accorde avec l'équation
 $yy dx - xx dy = 0$. En différentiant l'équa-
 tion A & faisant les opérations nécessaires, on
 aura

aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax - 2xx + 4xy}$ (D); d'un

autre côté l'équation $dy = \frac{yy dx}{xx}$ donne $\frac{dy}{dx}$

$= \frac{y}{x}$. Substituant dans l'équation D cette va-

leur de $\frac{dy}{dx}$, ôtant la fraction, transposant

& réduisant, il vient $3x^4 + 4x^3y - axxy$

$= 3y^4 + 4xy^3 - axyy$; d'où l'on tire axy

$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$, mais de l'é-

quation A, on tire $axy = y^3 + 2xyy - 2xxy$

$- x^3$. Si l'on retranche cette dernière équation

de la précédente, on trouvera $0 = 2y^3 -$

$xyy + xxy - 2x^3$, équation qui peut se ré-

soudre en celles-ci $0 = y - x$, & $0 = 2yy$

$+ yx + 2xx$, la première donne $y = x$ qui

peut satisfaire à l'équation $dy = \frac{yy dx}{xx}$; mais

elle est incompatible avec l'équation finie $x^3 -$

$y^3 + axy = 2xyy - 2xxy$, à moins qu'on

ne fasse $a = 0$, ou qu'on ne suppose x & y

constans : dans ce dernier cas $dx = 0$, &

$dy = 0$, satisfont à toutes les équations diffé-

rentielles à deux variables y & x ; ce qui est absurde,

& par conséquent l'équation proposée est absurde,

du moins en supposant que a n'est pas $= 0$.

Pour faire voir l'usage des transformations pré-

cédentes, soit proposée l'équation $dx^2 dy -$

$dy^3 = bdx ddy + xdx ddy$, dans laquelle on

suppose dx constant, & qu'on ne voit pas tout

d'un coup être intégrable. Si nous rendons dx variable, en écrivant (par la méthode ci-dessus)

$$dx dy - \frac{dy^3}{dx} = (b dx + x dx) d. \left(\frac{dy}{dx} \right); \&$$

supposant dy constant dans la quantité renfermée dans la parenthèse, nous aurons $dx dy$

$$- \frac{dy^3}{dx} = (b dx + x dx) \frac{dy ddx}{dx^2}, \text{ d'où l'on}$$

$$\text{tire } dx^2 + x ddx + b ddx - dy^2 = 0,$$

dont on trouve facilement l'intégrale en faisant

$$ddx = dz \& dx = z; \text{ car l'équation devient}$$

$$z dx + x dz + b dz - dy^2 = 0, \text{ dont l'inté-}$$

$$\text{grale est } zx + bz - y dy = 0. \text{ Donc en remet-}$$

tant la valeur de z & ajoutant encore la cons-

tante $C dy$ du même ordre, l'intégrale complète

$$\text{sera } x dx + b dx - y dy + C dy = 0, \& \text{ en}$$

intégrant de nouveau & ajoutant la constante C' ,

$$\text{on a } \frac{x^2}{2} + bx - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0. \text{ On a fait}$$

l'intégrale de $dy^2 = y dy$, à cause de dy constant.

On n'a point de méthode générale pour connaître la quantité qui étant supposée constante, peut faciliter l'intégration, mais on réussira souvent par la méthode suivante. Il faut examiner s'il y a dans l'équation, deux ou un plus grand nombre de termes qui soient intégrables en les multipliant, ou en les divisant par un facteur commun; l'on supposera que l'intégrale de ces termes ainsi multipliés ou divisés, est constante.

Soit l'équation $2px^3 dy^3 = dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy$, dans laquelle p est une fonction de x . Les deux termes $dx^2 dy +$

$x dx ddy$ étant divisés par dx , donnent $xdy + xddy$, dont l'intégrale est xdy . Supposons donc que $xdy = C$ constante, on aura $xddy + dydx = 0$, & en multipliant par dx , on aura encore $xdxddy + dydx^2 = 0$; donc l'équation proposée deviendra, après avoir effacé les termes $xdxddy + dx^2dy$, & divisé par $2x^3dy^3$, deviendra, dis-je, $p = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3dy^3}$. Or l'équation

$$xddy + dx dy = 0, \text{ donne } dy = \frac{-xddy}{dx}$$

$$\text{donc } p = \frac{-x dy^2 ddy}{2x^3 dx dy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3 dy^3} = \frac{-dy^2 ddy - dydxddx}{2x^2 dx dy^3}.$$

Mais $xdy = C$, par supposition; donc $dy = \frac{C}{x}$, & $p =$

$$\frac{-dyddy - dxddx}{2CCdx}, \text{ ou } 2pdx = \frac{-dyddv - dxddx}{CC};$$

$$\& \text{ en intégrant, } 2S.pdx = \frac{-dy^2 - dx^2}{2C^2} +$$

$C' = \frac{-dy^2 - dx^2}{2x^2 dy^2} + C'$, en remettant à la place de C sa valeur xdy . Il est aisé de voir qu'on intégreroit de même en supposant que p est une constante.

Soit l'équation $xy.dxd dy - xydyddx = ydydx^2 - yyd.pdy^2 - xdx dy^2$ dans laquelle p est une fonction de y ; dans cette équation il y a trois termes $xydxddx + ydydx^2 -$

$x dx dy^2$, qui divisés par $y y dy$, forment une différentielle complete $\frac{y x ddx + y dx^2 - x dx dy}{y y}$;

dont l'intégrale est $\frac{x dx}{y}$. En prenant cette intégrale pour constante, & différenciant, il vient $\frac{y x ddx + y dx^2 - x dx dy}{y y} = 0$; donc en ôtant la frac-

tion & multipliant par dy , on a $yx dy ddx + y dy dx^2 - x dx dy^2 = 0$. En transposant le terme $-x dy dy ddx$ dans l'équation proposée & effaçant ensuite dans le second membre les trois termes dont la somme $= 0$, il vient $xy dx ddy = -y y dp dy^2$;

donc $dp = \frac{-x dx ddy}{y dy^2}$, dont l'intégrale est $p = \frac{x dx}{y dy} + C$, comme il est évident, $\frac{x dx}{y}$ étant supposé constant.

On peut quelquefois intégrer facilement en supposant constant le produit de plusieurs différentielles. Soit, par exemple, l'équation $\frac{a ddy}{dy^3} =$

$\frac{d dx}{dy ddx} + \frac{b ddy ddx}{dy^2 ddx^2}$. Si on suppose le produit $dy ddx$ constant, tous les termes sont intégrables & l'on a $\frac{a}{2 dy^2} = \frac{dx}{dy ddx} + \frac{b ddy}{2 dy^2 ddx^2} + \frac{C}{dy^{\frac{2}{3}} ddx^{\frac{2}{3}}}$, en ajoutant la con-

tante $\frac{C}{dy^{\frac{2}{3}} ddx^{\frac{2}{3}}}$ de même ordre que l'intégrale.

164. Pour que les commençans ne soient point embarrassés en voulant intégrer une différentielle d'un ordre supérieur, nous allons donner la règle suivante :

Faites attention aux variables dont les différences se trouvent dans la différentielle proposée ; rassemblez dans une somme totale les termes affectés de la différence d'une même variable, en commençant par ceux où se trouve la différence de l'ordre le plus élevé ; intégrez ensuite cette somme comme si toutes les autres variables étoient constantes ; différenciez l'intégrale qui en résultera, en faisant varier successivement toutes les variables qu'elle renferme, & retranchez le résultat de la proposée. S'il ne reste rien, l'intégrale trouvée sera celle qu'on cherchoit, en lui ajoutant une constante de son ordre. S'il y a un reste, regardez le reste comme une différentielle proposée, & suivez, à l'égard de ce reste, le même procédé, & ainsi de suite s'il y a un second reste, &c. Ajoutez toutes ces intégrales & la constante du même ordre & vous aurez l'intégrale cherchée. On pourra suivre le même procédé lorsque la différentielle sera égale à 0, pourvu qu'elle soit intégrable dans l'état où elle est.

Soit la différentielle $x^3 y^2 ddy + 2x^2 y dx dy + 2x^3 y dy^2 + 2xy^2 dx^2 + 3x^2 y^2 dy dx$, dans laquelle on suppose dx constant. On doit considérer cette différentielle comme renfermant trois variables dy , x , y , puisque ddy , dx & dy sont les différences premières de dy , x & de y . Le terme $x^3 y^2 ddy$ est celui où se trouve la différence de l'ordre le plus élevé, dont je

prends l'intégrale en regardant dy seul comme variable, cette intégrale est $x^3 y^2 dy$, dont la différentielle, en faisant tout varier, est $x^3 y^2 ddy + 2x^3 y dy^2 + 3y^2 x^2 dx dy$. Retranchant ce résultat de la proposée, il reste $2x^2 y dx dy + 2xy dx^2$. Regardant ce reste comme une différentielle proposée à deux variables y & x , on prendra l'intégrale du terme $2x^2 y dx dy$, en supposant que y seul est variable, & l'on aura, à cause de dx constant, $x^2 y^2 dx$, dont la différentielle, en faisant varier y & x , est $2x^2 y dx dy + 2y^2 x dx^2$; donc l'intégrale cherchée sera $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + C dx$. En ajoutant la constante $C dx$ du même ordre, on n'ajoute pas $C dy$ au lieu de $C dx$, parce que dy n'étant pas supposé constant, la différentielle de $C dy$ n'auroit pas été $= 0$, & par conséquent se seroit trouvée dans la proposée.

165. Il arrive souvent qu'en ajoutant ou en retranchant une même quantité on peut facilement intégrer une équation. Soit, par exemple, l'équation $x ddy - y ddx = 0$, qu'on ne peut intégrer dans cet état. Mais en ajoutant & retranchant $dx dy$, l'on aura $x ddy + dx dy - y ddx - dx dy = 0$, dont l'intégrale est $x dy - y dx$. On n'ajoute point de constante, parce qu'aucune différence n'a été supposée constante.

Soit l'équation $fx ddy - fy ddx = b ddy + a ddx$, ajoutant & retranchant dans le premier membre la quantité $f dx dy$, l'on trouve $fx ddy + f dy dx - fy ddx - f dx dy = b ddy$

$+ a d d x$, dont l'intégrale est $f x d y - f y d x$
 $= b d y + a d x$.

REMARQUE. Nous n'ajoutons pas ici de constante du même ordre, parce que la proposée ne contenant aucune différentielle constante, la différentielle de cette constante n'auroit pas pu s'évanouir par la différenciation. On doit faire attention à cette remarque qui fait une exception à la règle ci-dessus.

166. On peut quelquefois par la multiplication ou la division, trouver facilement l'intégrale d'une équation proposée. Soit l'équation $\frac{d d y}{d x^2} = \frac{1}{y}$..

En multipliant par dy , l'on aura $\frac{d y d d y}{d x^2} = \frac{d y}{y}$, dans cette équation dx est supposé constant.

En intégrant & ajoutant une constante C , il vient $\frac{d y^2}{2 d x^2} + C = L.y$, ou $d y^2 + 2 C d x^2 = 2 d x^2 L.y$. On ajoute une constante qui ne contient point de différentielle, parce qu'en multipliant ensuite par $2 d x^2$, l'on a la constante $2 C d x^2$ qui contient une différentielle.

Soit l'équation $y^2 d d y = x d x d y - y d x^2$, dans laquelle on suppose dx constant. En divisant par y^2 , il vient $d d y = a \cdot \frac{x d y - y d x}{y^2}$, en écrivant a au lieu de la constante dx ; donc en intégrant, on aura $d y = a \frac{x}{y} = \frac{x d x}{y} + C d x$, en ajoutant une constante & remettant la valeur de a .

D d 4

167. Il est souvent utile d'employer les substitutions pour intégrer les équations différentielles des degrés supérieurs. Soit, par exemple, l'équation $(y - a). d^3 x + (a - x). d^3 y + dyddx - dxddy = 0$. Si on suppose $dy = dx - dp$, ou $y = x - p$ & qu'on substitue dans la proposée les valeurs de y , dy , ddy , $d^3 y$ que donne cette supposition, on trouvera en effectuant les multiplications indiquées, réduisant & transposant, l'équation $x d^3 p + dxddp - p d^3 x - dpddx = a d^3 p$, dont l'intégrale est $x ddp - pddx = addp$, & en intégrant de nouveau, $x dp - p dx = a dp$. Si l'on vouloit intégrer cette équation du premier ordre, on le pourroit en divisant par $-pp$, ce qui donneroit $\frac{-x dp + p dx}{pp} = \frac{-a dp}{pp}$, dont l'intégrale est $\frac{x}{p} = -\frac{a}{p} + C = \frac{Cp - a}{p}$. Mais on ne connoit point de méthode générale qui indique la substitution qu'il faut employer dans les différens cas. L'usage & le tâtonnement feront souvent réussir.

168. On emploie aussi avec avantage la méthode de demi-séparation; elle consiste pour les équations des ordres supérieurs à disposer l'équation de manière que les différentielles soient toujours jointes aux quantités dont elles sont les différentielles, en rejetant dans les multiplicateurs ou diviseurs communs de la quantité séparée, les quantités qui empêchent l'intégration. On égale à une nouvelle variable l'intégrale de la quantité séparée, & au moyen de cette supposition on donne une nouvelle forme à la proposée jusqu'à ce qu'on arrive à une

équation intégrable, ou qu'on connoisse que l'on ne peut intégrer la proposée par cette méthode. Au reste il faut quelquefois beaucoup d'art pour préparer les équations, afin qu'elles deviennent intégrables par cet artifice.

Soit l'équation $a dz ddy - a dy ddz = dx dz^2$. Je la dispose ainsi $\frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz} \right) = \frac{dz}{a}$. La quantité comprise dans la parenthèse étant intégrable, je fais $\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz} = \frac{dp}{p}$; donc $L. dy - L. dz = L. p$, ou $L. \frac{dy}{dz} = L. p$, ou $\frac{dy}{dz} = p$; donc en substituant, $\frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p} = \frac{dz}{a}$ (A), ou $\frac{dp dz}{dx} = \frac{dz}{a}$ (à cause de $p = \frac{dy}{dz}$), & $dp = \frac{dx}{a}$. Donc $p = \frac{x}{a} + C$. Substituant ces valeurs de p & de dp dans l'équation A, & ôtant les fractions, l'on trouve $a dy = x dz + C adz$ qui est l'intégrale de la proposée.

Soit encore l'équation $x d^3 y + 3 dx ddy = - 3 dy ddx$, dans laquelle on suppose ddx constant; Pour la réduire à cette méthode, je la dispose ainsi: $x d^3 y + dx ddy = - 3 dy ddx - 2 dx ddy$, le second membre de cette équation est intégrable. Je donne à cette équation la forme $\left(\frac{d^3 y}{d d y} + \frac{dx}{x} \right) \cdot x ddy = - 3 dy ddx - 2 dx ddy$; je fais ensuite $\frac{d^3 y}{d d y} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$; ou $L. x ddy = L. p$, ou $p = x ddy$. Donc notre équation devient $dp = - 3 dy ddx - 2 dx ddy$, & en intégrant, $p = x ddy = - y ddx - 2 dx dy$, équation qu'on pourra réduire au premier ordre: car on a $x ddy + 2 dx dy + y ddx = 0$, & en intégrant encore $x dy + y dx = 0$, & en intégrant encore $xy = C$.

169. PROBLÈME. Une équation différentielle d'un ordre quelconque étant supposée réductible à un ordre inférieur, intégrer cette équation. On s'y prendra comme on a dit ci-dessus (164), & afin de pouvoir ajouter une constante chaque fois qu'on intégrera, on supposera une différence constante. Si cette méthode ne réussit pas, la proposée n'est pas complète : ainsi l'on peut par cette règle trouver si une différentielle, ou si une équation différentielle est complète ou non.

Nous allons maintenant donner la méthode de trouver le facteur qui peut rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre supérieur lorsque cela est possible : nous supposerons une des premières différences constante, ce qu'il est facile d'obtenir en effaçant dans la proposée tous les termes qui contiennent les différences de cette première différentielle.

170. Soit $A d d y + B = 0$, l'équation générale qui peut représenter toute différentielle à deux variables x & y , dans laquelle dx est constant, & qui ne contient d'autre seconde différence que $d d y$, avec des puissances quelconques des premières différences dx & dy , A & B étant des fonctions de x , y , dx & dy . On peut écrire ainsi cette équation $A d d y + \frac{(B - K) dy}{dy} + \frac{K}{dx} dx = 0$, qui est la même que la précédente. On multiplie cette équation par le facteur M , fonction de x , y , dx , dy pour avoir $M A d d y + M \cdot \frac{(B - K) dy}{dy} + \frac{M K}{dx} dx = 0$ (P).

Supposant maintenant que cette équation est complète, & regardant y , x & dy comme autant de variables, & la différentielle P comme la même que celle-ci, $MA ddy + MB' dy + MC dx = 0$, en supposant $B' = \frac{B - K}{dy}$, &

$C = \frac{K}{dx}$, on aura (par le N°. 98), les trois

$$\text{équations } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB')}{ddy}, \quad \frac{(d.MA)}{dx} =$$

$$= \frac{(d.MC)}{ddy}; \quad \frac{(d.MB')}{dx} = \frac{(d.MC)}{dy},$$

ou en remettant les valeurs de B' & de C , les

$$\text{trois suivantes } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.M. \frac{B-K}{dy})}{ddy} \quad (a);$$

$$\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d. \frac{MK}{dx})}{ddy}; \quad \frac{(d.M. \frac{B-K}{dy})}{dx} =$$

$$\frac{(d. \frac{MK}{dx})}{dy}, \text{ équation que je désigne par } (b), \text{ comme}$$

j'ai désigné par (a) la première des trois dernières.

La différentielle du produit $\frac{1}{dy} \cdot M(B - K)$

prise en ne faisant varier que dy , après qu'on l'a

divisée par ddy , est $= -\frac{1}{dy^2} \cdot M(B - K) +$

$$\frac{1}{dy} \cdot \frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \cdot \frac{(d.MK)}{ddy}; \text{ donc la}$$

première des trois équations ci-dessus devient

$$\frac{(d.MA)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} \cdot M(B - K) + \frac{1}{dy} \cdot x$$

$$\frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \cdot \frac{(d.MK)}{ddy} (R). \text{ La seconde}$$

équation étant la même que celle-ci $\frac{(d.MA)}{dx} =$
 $\frac{1}{dx} \cdot \frac{(d.MK)}{ddy}$, donne $\frac{(d.MK)}{ddy} = dx \cdot \frac{(d.MA)}{dx}$.

Substituant cette valeur dans l'équation R, on trouvera après les opérations ordinaires $MK = MB -$

$$dy \cdot \frac{(d.MB)}{ddy} + dx dy \cdot \frac{(d.MA)}{dx} + dy^2 \times$$

$$\frac{(d.MA)}{dy} (H), \text{ équation qui fera connoître K.}$$

dès que M sera connu. Cette même équation donnera, en transposant, la valeur de $MB - MK$, ou de $M(B - K)$, & en substituant les valeurs de MK & de $M(B - K)$ prises dans cette équation, dans les équations ci-dessus a & b, on aura les deux équations suivantes.

$$\text{I. } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left[d \cdot \left(\frac{(d.MB)}{ddy} - dx \cdot \frac{(d.MA)}{dx} - dy \cdot \frac{(d.MA)}{dy} \right) \right]}{ddy} \quad (T)$$

$$\text{II. } \frac{\left[d \cdot \left(\frac{(d.MB)}{ddy} - dy \cdot \frac{(d.MA)}{dx} - dy \cdot \frac{(d.MA)}{dy} \right) \right]}{dx} =$$

$$\frac{\left[d \cdot \left(\frac{MB}{dx} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(d.MB)}{ddy} + dy \frac{(d.MA)}{dx} + \frac{dy^2}{dx} \cdot \frac{(d.MA)}{dy} \right) \right]}{dy} \quad (V)^*.$$

* L'expression $\frac{(d.BM)}{ddy}$ signifie qu'on doit différentier MB en faisant varier seulement dy & diviser par ddy.

La question est donc réduite à trouver pour M une fonction de x , dx , dy qui satisfasse aux équations T & V qu'on vient de trouver, ce qui n'est pas facile, & nous ne connoissons point de méthode générale pour réussir.

Nous nous contenterons d'examiner quelques équations très-étendues après avoir fait remarquer qu'en supposant $M = 1$ dans les équations précédentes, on aura les deux équations de condition nécessaires, pour qu'une formule différentielle, ou encore une équation différentielle à deux variables x & y avec dx constant, soit intégrable dans l'état où elle est.

171. Soit proposée l'équation du second ordre $E dx^2 + F dx dy + G dy^2 + H ddy = 0$, dans laquelle dx est constant. E , F , G , H & le facteur M qui lui manque pour la rendre intégrable, sont des fonctions de x & de y sans dx , ni dy . En comparant cette équation à la générale, on aura $A = H$; $B = E dx^2 + F dx dy + G dy^2$; donc $MB = ME dx^2 + MF dx dy + MG dy^2$. Substituant les valeurs de A , $M.B$ & de B dans les équations T & V , & faisant attention que E , F , G , H , M ne renferment ni dx , ni dy , l'équation T deviendra $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$. Cette valeur de $\frac{(d.MH)}{dy}$ étant aussi substituée dans l'équation V , on aura

$$\frac{[d.(MF dx + MG dy - dx. \frac{(d.MH)}{dx})]}{dx} =$$

$$\frac{\left[d. \left(M E d x + d y. \frac{(d. M H)}{d x} \right) \right]}{d y} .$$
 Si dans la première équation $M G = \frac{(d. M H)}{d y}$, on différencie en faisant seulement varier x , & qu'on divise ensuite par $d x$, on aura $\frac{(d. M G)}{d x} = \frac{\left[d. \left(\frac{(d. M H)}{d y} \right) \right]}{d x}$. Si on substitue cette valeur de $\frac{(d. M G)}{d x}$ dans la seconde équation, après avoir divisé chaque membre par $d x$, se souvenant que $d x$ est toujours constant, & qu'on fasse attention que le dernier terme de chaque membre s'évanouit, on trouvera $\frac{(d. M F)}{d x} = \frac{[d.(d. M H)]}{d x d x} = \frac{(d. M E)}{d y}$, entendant par cette expression qu'on doit différentier $M H$ en faisant varier x & diviser ensuite par $d x$, puis différentier le résultat en faisant varier x & divisant encore par $d x$. Les équations $\frac{(d. M F)}{d x} = \frac{[d.(d. M H)]}{d x d x} = \frac{(d. M E)}{d y}$ (A), & $M G = \frac{(d. M H)}{d y} = \frac{M (d. H)}{d y} + \frac{H (d. M)}{d y}$ sont celles qu'il faut traiter pour intégrer la proposée.

Dans la dernière équation on regarde y seul comme variable. En ôtant le diviseur, transposant & divisant par $M H$, il vient $\frac{d M}{M} = \frac{G d y}{H} =$

$\frac{dH}{H}$. Si l'on prend l'intégrale en regardant y seul comme variable, puisque la différenciation a été faite dans cette supposition, on aura $L.M = S. \frac{Gdy}{H} - L.H + L.p$, $L.p$ est une fonction de x , parce qu'on a supposé x constant dans la différenciation. En multipliant $S. \frac{Gdy}{H}$ par

$L.e = 1$, l'on aura $S. \frac{Gdy}{H} \cdot L.e =$

$S. \frac{Gdy}{H}$, & l'intégrale trouvée deviendra $M =$

$\frac{p}{H} e^{S. \frac{Gdy}{H}}$. Si l'on substitue cette valeur de M dans l'équation A & qu'on divise par

$e^{S. \frac{Gdy}{H}}$, on aura l'équation qui doit déterminer p . Mais p est une fonction de x sans y ; donc dans l'équation qui doit déterminer p , tous les y doivent disparaître, autrement la proposée ne peut devenir complète par la multiplication d'un facteur M qui soit composé de x , de y & de constantes, ou qui soit une fonction de x & de y .

Soit $2ydx^2 + (2x + 3yx) dx dy + 2x^2 dy^2 + x^2 y ddy = 0$, équation qui n'est pas complète, on aura $E = 2y$, $F = 2x + 3yx$,

$G = 2x^2$, $H = x^2 y$, $S. \frac{Gdy}{H} =$

$S. \frac{2dy}{y} = L.y^2$, & $M = \frac{p}{x^2 y} e^{L.y^2}$. Or

$e^{L.y^2} = y^2$: car $L.y^2 . L.e = L.y^2$; donc
 $L.e^{L.y^2} = L.y^2$, & $e^{L.y^2} = y^2$; ainsi $M = \frac{py^2}{x^2 y} =$

$\frac{py}{xx}$. Substituant cette valeur de M & celles de

H, F, E , dans l'équation A , on trouvera, en

transposant & réduisant, $\frac{2ydp}{x dx} - \frac{6yp}{x^2} +$

$\frac{3y^2 dp}{x dx} - \frac{3y^2 p}{xx} - \frac{y^2 ddp}{dx^2} = 0$. Egalant à 0

la somme des termes affectés de la même puis-

sance de y , on aura les deux équations $\frac{2ydp}{x dx} -$

$\frac{6yp}{x^2} = 0$, & $\frac{3y^2 dp}{x dx} - \frac{3y^2 p}{x^2} - \frac{y^2 ddp}{dx^2} = 0$.

La première donne $\frac{dp}{p} = \frac{3 dx}{x}$, & la seconde

après avoir divisé par y^2 & ôté les fractions,

donne $3x dp dx - 3p dx^2 - x^2 ddp = 0$. La

première équation étant intégrée, donne $L.p =$

$3 L.x = L.x^3$; donc $p = x^3$. Cette valeur de

p satisfait à la seconde équation; on a donc $p =$

x^3 & $M = \frac{py}{x^2} = xy$. Si l'on remonte à la va-

leur de MK & de $M(B - K)$ que doit donner

l'équation (H) ci-dessus, on aura $MK =$

$2xy dx^2 + 3x^2 y^2 dx dy$, & $M(B - K) =$

$2x^2 y dx dy + 2x^3 y dy^2$; de sorte que la

proposée

proposée étant rapportée à la forme générale

$$M A d d y + M \cdot \frac{(B-K) d y}{d y} + \frac{M K}{d x} d x = 0,$$

devient $x^3 y^2 d d y + (2 x x y d x + 2 x^3 y d y) d y + (2 x y y d x + 3 x^2 y^2 d y) d x = 0$, équation complète & dont l'intégrale, en ajoutant une constante, est $x^3 y^2 d y + x^2 y^2 d x + C d x = 0$.

Si après la substitution de la valeur de M dans l'équation $\frac{(d.M F)}{d x} = \&c.$ tous les y dis-

paroissent d'eux mêmes, l'équation qui doit donner p est du second ordre, de manière qu'il paroît que dans ce cas la méthode ne fait rien connoître. Mais alors l'équation sera de cette

$$\text{forme } a d x^2 + b p d x^2 + c d p d x + f d d p = 0;$$

a, b, c, f étant des fonctions de x sans y . Pour

intégrer cette équation on l'écrit ainsi $a m d x^2 +$

$$b m p d x^2 + (c - k) m d x d p + k m d x d p +$$

$$f m d d p = 0,$$

qui est la même que la précédente multipliée par le facteur m . Supposant en-

suite que m & k étant des fonctions de x sans y ,

les quatre derniers termes soient une différentielle

complète; alors le premier terme qui ne con-

tiendra qu'une seule variable x , s'intégrera aisé-

ment; de plus, cette supposition donnera (par

le N°. 89) les équations $\frac{(d.f m)}{d x} =$

$$\frac{[d.(m k d p + b m p d x)]}{d d p}; \quad \frac{(d.f m)}{d p} = \frac{[d.((c-k) m.d x)]}{d d p};$$

$$\frac{[d.(kmdp + bmpdx)]}{dp} = \frac{[d.(c-k)mdx]}{dx};$$

$$\frac{[d.(c-k)mdx]}{dx} = \frac{[d.bmpdx]}{dp}.$$

Mais parce que a, b, k, m , ne renferment point p , la seconde équation donne $0 = 0$, ou est nulle; la

première se réduit à $\frac{(d.fm)}{dx} = km$, & la troisième avec la quatrième, à cause de dx constant, se

réduisent à $\frac{(d.(c-k).m)}{dx} = bm$. De l'équation

$$\frac{(d.fm)}{dx} = km, \text{ on tire } \frac{f.(d.m)}{dx} + \frac{m.(d.f)}{dx} = km;$$

$$\& \frac{dm}{m} = \frac{kdx}{f} - \frac{df}{f}; \text{ donc } L.m = S.\frac{k}{f}dx -$$

$L.f + L.h$, h étant une constante. Donc en supposant $L.e = 1$, on aura $m = \frac{h}{f} \times$

$$S.\frac{k}{f}dx. \text{ de l'équation } \frac{[d.(c-k)m]}{dx} = bm$$

$$\text{on tire aisément } \frac{dm}{m} = \frac{b dx - d(c-k)}{c-k}. \text{ En}$$

égalant cette valeur de $\frac{dm}{m}$ à celle qu'on vient

de trouver ci-dessus, on aura l'équation

$$\frac{b dx - d(c-k)}{c-k} = \frac{k dx - df}{f}; \text{ donc } b f dx -$$

$$f dc + f dk = (c-k).kdx - (c-k)df, \text{ ou}$$

$$b f dx - k(c-k)dx + (c-k)df = f dc +$$

$\int dk = 0$, équation différentielle du premier ordre dont dépend la valeur de k . Supposant qu'on ait déterminé k par le moyen de cette équation,

on aura m par l'équation $m = \frac{h}{f} e^{\int \frac{k}{h} dx}$,

k & m étant supposés connus, on aura p en mettant les valeurs de k & de m dans l'équation $amdx^2 + bmpdx^2 + (c - k)mdxdp + kmdxdp + fmddp = 0$, & en intégrant. Comme cette équation doit être complète, en lui donnant cette forme $(amdx + bmpdx + km dp)dx + ((c - k).mdx)dp + fmddp = 0$, & regardant cette équation comme une différentielle complète à trois variables, x, p, dp , on peut prendre pour intégrale celle du premier terme $(amdx + bmpdx + km dp)dx$, en supposant x seul variable & traitant dx, p & dp dans la parenthèse comme constants; ce qui donne pour l'intégrale, $dx. S. amdx + p dx. S. bmdx + dp S. km dx + C dx, = 0^*$, $C dx$ étant la constante ajoutée. Si on change maintenant p en y , on trouvera aisément que cette équation se rapporte à la forme de celle du (N°. 128); car en joignant ensemble le premier & le dernier terme, notre équation, sera réduite à trois termes.

* Il est aisé de voir que le terme mdx peut être écrit ainsi $dx. am$, multipliant par dx on aura $dx. amdx$, dont l'intégrale $= dx. S. amdx$, en regardant dx qui est devant le signe S , comme constant.

On aura donc la valeur de p : ainsi l'équation $E dx^2 + F dx dy + G dy^2 + H ddy = 0$, sera toujours réductible au premier ordre lorsqu'il ne lui manquera, pour être complète, qu'un facteur composé de x , y & constantes, ou de x & y ; mais si après la substitution de la valeur de M

dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx}$ &c. l'équation renferme

des y qu'on ne puisse faire disparaître sans assujettir les coefficients E, F, G, H , à certaines conditions, c'est une marque que le facteur doit renfermer des dx ou des dy , ou même des dx & des dy à la fois; alors on aura recours à la méthode générale (170). On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas une équation différentielle du second degré & d'une forme connue a besoin d'un multiplicateur composé de x, y & constantes, ou de x & dy & constantes, &c.

172. Soit $A d^3 y + B = 0$, l'équation générale du troisième ordre & à deux variables x & y dans laquelle dx est supposé constant. Supposons que M fonction de x, y, dx, dy, ddy & de constantes, est le facteur qui peut rendre intégrable cette équation,

on pourra l'écrire ainsi $A M d^3 y + M \cdot \frac{B-K}{ddy} ddy +$

$M \cdot \frac{K-H}{dy} dy + \frac{M H}{dx} dx = 0$. Supposant main-

tenant que cette équation est complète, on aura

$$\frac{(d.AM)}{ddy} = \frac{(d.M \frac{B-K}{ddy})}{d^3 y}; \frac{(d.AM)}{dy} = \frac{[d.(M \cdot \frac{K-H}{dy})]}{d^3 y};$$

$$\begin{aligned} \frac{(d. A M)}{d x} &= \frac{\left[d. \frac{M H}{d x} \right]}{d^3 y}; \frac{(d. M \frac{B-K}{d d y})}{d y} = \\ \frac{(d. M \frac{K-H}{d y})}{d d y}; \frac{(d. M \frac{B-K}{d d y})}{d x} &= \frac{(d. \frac{M H}{d x})}{d d y}; \\ \frac{(d. M \frac{K-H}{d y})}{d x} &= \frac{(d. \frac{M H}{d x})}{d y}. \end{aligned}$$

A l'aide de ces équations on tâchera de déterminer K , H , & M , il est aisé de voir comment on doit s'y prendre pour les équations des ordres supérieurs; mais le calcul sera d'autant plus pénible que l'ordre de l'équation sera plus élevé.

REMARQUE. Lorsqu'on voudra intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui ne sera pas complète, on pourra la multiplier par un facteur M , lequel facteur pourra être une fonction p de x ou une fonction q de y , ou une fonction r de y & de x ensemble, ou renfermer $d y$ & $d x$, ou $d d y$, $d d d y$, $d x^2$, &c. Ainsi on pourra avoir différens ordres de facteurs pour les équations différentielles du second ordre, tels que p ; $p d x + q d y$; $p d x^2 + q d x d y + r d y^2$ &c. Si la proposée est du second ordre, on pourra d'abord essayer si le premier facteur p réussit, s'il ne réussit pas, on essayera le second: si celui-ci ne réussit pas, on aura recours au troisième, &c. On peut voir maintenant comment on doit trouver les facteurs des équations du troisième ordre & de celles qui sont plus élevées; mais il est aisé de comprendre combien ces sortes de recherches sont pénibles lorsque les équations sont d'un ordre un peu élevé.

DE QUELQUES MÉTHODES POUR INTÉGRER OU POUR RÉDUIRE AUX ORDRES INFÉRIEURS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS, LORSQU'ELLES ONT CERTAINES CONDITIONS,

173. Soit l'équation $ddy = \frac{x d^3 y}{dx^3} + \frac{a^3 dx^3}{d^3 y}$, je suppose $d^3 y = t dx^3 = c c t dx$, en faisant $dx = c$. J'intègre en regardant dx comme constant, & j'ai $ddy = c^2 S. t dx = dx^2 S. t dx$; substituant dans la proposée les valeurs de ddy , & de $d^3 y$ qu'on vient de trouver, elle devient $dx^2 S. t dx = x t dx^2 + \frac{a^3 dx^2}{t}$, ou en divisant par dx^2 , $S. t dx = x t + \frac{a^3}{t}$. Donc en différenciant, $t dx = t dx + x dt - \frac{a^3 dt}{t^2}$; ou $(x - \frac{a^3}{t^2}) dt = 0$ (H); d'où l'on tire $x - \frac{a^3}{t^2} = 0$, ou $t^2 x = a^3$, ou $t = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ $= \frac{d^3 y}{dx^3}$, ou $2 a \sqrt{a} dx^2, \frac{dx}{\sqrt{x}} = d^3 y$, & en intégrant, $2 a \sqrt{a} \sqrt{x} dx^2 + C dx^2 = ddy$; & en intégrant encore il vient $\frac{2.2 a \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}}}{3} dx + \frac{C x^3}{3} = y$.

$Cx dx + B dx = dy$, $B dx$ est une constante ajoutée. Si on intègre encore, on trouvera

$$\frac{2.2.2a\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}}{3.5} + \frac{Cxx}{2} + Bx + D = y.$$

Substituant les valeurs trouvées de ddy & d^3y dans la proposée, on trouvera après les opérations ordinaires $2a\sqrt{a}\sqrt{x} + C = 2a\sqrt{a}\sqrt{x}$. Cette équation doit être identique, & par conséquent on a $C = 0$; donc notre intégrale de-

vient $\frac{2.2.2a\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}}{3.5} + Bx + D = y$. De

l'équation H, on tire encore $dt = 0$; donc

en intégrant $t = C = \frac{d^3y}{dx^3}$, ou $Cdx^3 =$

d^3y ; donc en intégrant, $Cxdx^2 + Bdx^2 =$

ddy : en intégrant encore, il vient $\frac{Cx^2dx}{2} +$

$Bxdx + Ddx = dy$; & enfin $\frac{Cx^3}{2.3} +$

$\frac{Bx^2}{2} + Dx + E = y$, équation qui appar-

tient à une courbe du genre des paraboloides. Dans cette dernière équation il y a quatre constantes indéterminées; cependant l'intégrale complète d'une équation différentielle du troisième ordre ne doit renfermer que trois constantes indéterminées. Il faut donc en déterminer une par le moyen des autres; pour cela substituons dans la proposée les valeurs de ddy , & d^3y qu'on vient de trouver, il viendra après les opérations

ordinaires $Cx + B = Cx + \frac{a^3}{C}$. Cette équation devant être identique, fait voir que $B = \frac{a^3}{C}$; donc la vraie intégrale sera $\frac{Cx^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^3 x^2}{2C} + Dx + E = y$.

Soit encore l'équation $ad^3y = \frac{x d^4y^2}{dx^3} + b dx^3$, on fera $d^4y = t dx$, & $d^3y = dx^3$, S. $t dx$. Les substitutions, en divisant par dx^3 , donneront $a S. t dx = x t t + b$. Différenciez cette équation pour avoir $a t dx = t^2 dx + 2xt dt$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2 dt}{a-t}$; donc en intégrant, ajoutant L. C au second membre & passant ensuite des logarithmes aux nombres, $a - t = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}$, ou $a - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}} = t$; donc $d^4y = dx^3 \cdot \left(a dx - dx \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}} \right)$, & en intégrant, $d^3y = dx^3 \cdot (B + ax - 2\sqrt{C} \cdot \sqrt{x}) (A)$. On substituera dans la proposée les valeurs de d^4y , d^3y , & l'on déterminera de cette manière les constantes C & B l'une par l'autre, & l'on aura après les opérations ordinaires $aB + a^2x - 2a\sqrt{C} \cdot \sqrt{x} = a^2x - 2a\sqrt{C} \cdot \sqrt{x} + C + b$, équation qui ne peut être vraie, à moins que aB ne soit $= C + b$, ou $B = \frac{C + b}{a}$. Après avoir déterminé la valeur de B en C, intégrons trois fois de suite l'équation A en ajoutant à chaque

fois une constante, on aura $y = F + Ex + \frac{Dx^2}{2} + \frac{Bx^3}{2.3} + \frac{ax^4}{2.3.4} - \frac{2.2.2.2\sqrt{C.x^{\frac{7}{2}}}}{3.5.7}$,
 équation qui, en substituant la valeur de $B = \frac{C+b}{a}$, fera l'intégrale complete de l'équation
 proposée. En général étant donnée une équation à trois termes de la forme $d^m y = xA + B$,
 dans laquelle A & B sont supposés des fonctions de dx , $d^{m+1}y$ & de constantes, on pourra
 l'intégrer en faisant $d^{m+1}y = t dx^{m+1}$, & en imitant ce qui vient d'être fait dans l'un ou l'autre
 des exemples précédens.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $d^3 y dy + a ddy . ddy + b d^2 y dy^2 + c dy^4 = 0$, qui est la
 même que celle dont parle l'illustre M. d'Alembert, dans le tome VI de ses Opuscules, page 390, je
 ferois $dy = p dx$, dx étant constant, & $dx = q dp$; donc $ddp = -\frac{dqdp}{q}$. Substituant dans la propo-
 sée les valeurs de dy , ddy , $d^3 y$, que donnent les
 suppositions, on a la transformée $-\frac{dq}{q} + \frac{a dp}{p} + bpqdp + ep^3 q^2 dp = 0$, équation du premier degré. Si l'on
 fait $\frac{p^a}{q} = z$, ou $p^a = zq$, ou $ap^{a-1} dp = zdq + qdz$,
 ou $dq = \frac{ap^{a-1} dp - q dz}{z}$, on aura la nou-
 velle transformée $\frac{dz}{z} + \frac{bp^{a+1} dp}{z} + \frac{ep^{3+2a} dp}{z^2} = 0$;
 & supposant enfin $p^{a+2} = 1$, on aura la dernière trans-

formée $d z + b' d t + \frac{e' t d t}{z} = 0$, équation homogène dans laquelle b' & e' sont des constantes.

En faisant $\frac{t}{z} = u$, la dernière transformée se trouvera toute séparée. Or $\frac{t}{z} = \frac{q p^{a+2}}{p^a} = p^2 q$; donc $q = \frac{u}{p^2}$.

Ainsi en supposant $d y = p d x$ & $d x = \frac{u d p}{p^2}$, ou ce qui revient au même, en supposant $d y = \frac{d x}{d n}$, & $d x = -u d n$,

ce qui donne $p = \frac{1}{n}$, l'équation se trouvera toute séparée.

Si $a + 1$ étoit $= -1$, ou $a = -2$, la solution précédente ne pourroit avoir lieu parce que pour lors & $p^{a+1} d p$ dépend des logarithmes. Mais dans ce cas

on feroit $q = p^b z$ (au lieu de faire $\frac{p^a}{q} = z$), & on

auroit la transformée $-\frac{h d p}{p} - \frac{d z}{z} + \frac{a d p}{p} + b p^{b+1} z d p + e p^{3+2b} z^2 d p = 0$, qui est homogène si l'on a $h + 1 + 1 = -1$, & $3 + 2h + 2 = -1$, ou si l'on a $h = -3$.

En général, soit $d^3 y$ le premier terme d'une équation composée de tant d'autres termes qu'on voudra $a (d^2 y)^k d y^m d x^{m-2k+3} + a' (d^2 y)^{k'} \times d y^{m'} d x^{m'-2k'+3}$ &c.; en supposant, comme ci-dessus, &c. $d y = p d x$, & $d x = q d p$, la transformée sera $-\frac{d q}{q} +$

$a d p \cdot p^m q^{-k+2} + a' d p \cdot p^{m'} q^{-k'+2}$ &c. $= 0$. Soit $q = p^s z^s$, on aura la nouvelle transformée $-\frac{d s}{s} +$

$\frac{s dp}{p} - \frac{t dz}{z} + a dp \cdot p^{m-k s + 2 s} \times z^{-k t + 2 t} +$
 $a' dp \cdot p^{m' - k' s + 2 s} \times z^{-k' t + 2 t} \&c. = 0$; équa-
 tion qui sera homogene si $m - k s + 2 s - k t + 2 t = -1$,
 & si $m' - m' s + 2 s - k' t + 2 t = -1$; d'où l'on tire
 facilement $s + t = \frac{m - m'}{k - k'}$; & par conséquent si $\frac{m - m'}{k - k'}$
 est une quantité constante dans tous les termes, com-
 parés deux à deux, la proposée sera intégrable. Dans le
 cas de l'équation ci-dessus $d^3 y + addy \cdot ddy + \&c. = 0$,
 on a $m = -1$, $k = 2$, $m' = 1$, $k' = 1$, $m'' = 3$, $k'' = 0$;
 donc $\frac{m - m'}{k - k'} = -2$, & $\frac{m - m''}{k - k''} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$.

Dans l'équation $s + t = \frac{m - m'}{k - k'}$, on peut supposer
 à volonté t ou s tout ce qu'on voudra. Si, par exemple,
 on suppose $t = 0$, on fera $q = p'$.

Par la même méthode si ddy est le premier terme
 d'une équation du second ordre dont les autres termes
 soient $+ a dy^k y^m dx^{2-k} + a' dy^{k'} y^{m'} dx^{2-k'} \&c.$
 On aura, en faisant $dx = q dy$, la transformée —
 $\frac{dq}{q} + a dy \cdot y^m q^{2-k} + a' dy \cdot y^{m'} q^{2-k'} \&c. = 0$;
 équation qui sera intégrable si $\frac{m - m'}{k - k'}$ est une constante;
 c'est pourquoi l'équation $d^2 dy + \frac{ady^2}{y} + b y dy dx + c y^3 dx^2$
 $= 0$, est intégrable, & ainsi des autres.

174. PROBLÈME, Soit l'équation $dx^3 -$
 $dx dy^2 = y dx ddx + 2 x dy ddy$, qu'on pro-
 pose de réduire au premier ordre. En supposant dx
 constant on aura $y dx ddx = 0$, & la proposée

deviendra $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy dy$. Faisons $dy = z dx$ pour avoir $dy = dz dx$ & $dx^3 - z^2 dx^3 = 2xz dx^2 dz$, ou $dx - z^2 dx = 2xz dz$, ou $\frac{dx}{2x} = \frac{z dz}{1 - z^2}$; dont l'intégrale est $L. x = -L. (1 - z^2) + L. C$, ou $x = \frac{C}{1 - z^2}$. Substituant dans cette intégrale la valeur de $z = \frac{dy}{dx}$, on trouve $x = \frac{C dx^2}{dx^2 - dy^2}$.

Toutes les équations du troisième ordre & à deux variables dans lesquelles les variables manquent peuvent s'intégrer par cette méthode.

Soit l'équation $dx d^3 y + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$, dans laquelle dx est constant, qu'on propose de réduire au premier ordre, je fais $dy = z dx$, ce qui donne $ddy = dx dz$, $d^3 y = ddz dx$, & la proposée devient $ddz dx^2 + dx^3 dz = dx^4 + z^4 dx^4$, ou $ddz + dz dx = dx^2 + z^4 dx^2$. Qu'on fasse maintenant $dz = p dx$, ou $ddz = dp dx$, on trouvera $dp + p dx = dx + z^4 dx$; mais $dx = \frac{dz}{p}$; donc $p dp + p dz = dz + z^4 dz$, dont l'intégrale donnera celle de la proposée.

En faisant $\frac{dy}{dx} = z$, ou $\frac{dx}{dy} = z$, & en substituant $z dy$ au lieu de dx , ou $z dx$ au lieu de dy , on peut souvent intégrer ou réduire à un ordre inférieur les équations différentielles à deux variables x & y , de quelque ordre quelles

soient. On se sert de la première substitution lorsque la variable finie x ne se trouve pas dans l'équation, & de la seconde si la variable finie y manque dans la proposée. Si la proposée contient les différences supérieures $ddy, d^3y, d^4y, \&c.$ & que dx soit constant, on supposera $dy = zdx$, d'où l'on tire $ddy = dz dx, d^3y = d dz dx, d^4y = d^3z dx, \&c.$ Si au contraire l'équation contient les différences $ddx, d^3x \&c.$ & que dy soit constant, on fait $dx = zdy, ddx = dz dy, \&c.$

175. PROBLÈME. Intégrer l'équation différentielle à deux variables $A dy^n + B dx^n + C dy^m dx^{n-m} + D dy^p dx^{n-p} + E dy^q dx^{n-q} + \&c. = 0$, dans laquelle les coefficients $A, B, \&c.$ sont des fonctions d'une seule variable x , ou y & de constantes, ou 0. Si la variable finie, x ne se trouve pas dans la proposée, on fera $dx = z dy$; donc en substituant cette valeur de dx & divisant ensuite l'équation par dy^n , on aura l'équation finie à deux variables z & y , $A + Bz^n + Cz^{n-m} + Dz^{n-p} + Ez^{n-q} + \&c. = 0$, par laquelle on tâchera de déterminer z en y , ou y en z . On substituera une de ces deux valeurs dans la différentielle $z dy$, & on aura $z dy = R dy$, ou $z dy = T dz$, R étant une fonction de y , & T une fonction de z , & l'équation $dx = z dy$, sera changée en $dx = R dy$, ou $dx = T dz$; donc en intégrant on aura $x = S. R dy + C$, & $x = S. T dz$; la première intégrale donnera la valeur de x en y , & la seconde donnera la

valeur de x en z . Mais z étant une fonction de y comme le fait voir l'équation $A + Bz + \&c. = 0$, on pourra avoir aussi la valeur de x en y par la seconde intégrale combinée avec l'équation $A + Bz + \&c. = 0$.

Si y manque dans l'équation, on fera $dy = z dx$: substituant cette valeur de dy dans la proposée & divisant ensuite par dx on aura l'équation finie $Az'' + B + Cz''' + Dz' + Ez + \&c. = 0$, par laquelle on tâchera de déterminer la valeur de z en x , ou celle de x en z , & substituant une de ces valeurs dans $z dx$, & procédant comme dans le premier cas, on trouvera la valeur de x en y au moyen de l'équation $dy = z dx$.

176. PROBLÈME. Intégrer ou réduire au premier ordre l'équation générale du second ordre à deux variables $A dd y + B dy^2 + C' dx dy + D dx^2 = 0$, dans laquelle dx est constant, & les coefficients $A, B, \&c.$ sont des fonctions de l'une des variables x , ou y & de constantes, ou 0. Puisque dx est constant, on fera $dy = z dx$; donc $ddy = dz dx$. Substituant ces valeurs dans la proposée & divisant par dx , il vient $A dz + B z^2 dx + C' z dx + D dx = 0$, équation différentielle du premier ordre & à deux variables z & x , lorsque y manque dans la proposée. Si c'est x qui manque, on fera $dx = \frac{dy}{z}$. Substituant cette valeur de dx , & multipliant par z , la proposée deviendra $A z dz + B z^2 dy + C' z dy + D dy = 0$, équation du premier

ordre à deux variables z & y . On cherchera l'intégrale de cette équation par les méthodes ci-dessus, & on déterminera z en x , ou en y , ou celle de x , ou de y en z . Substituant une de ces valeurs dans $z dx$, l'équation $dy = z dx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$ ne contiendra plus qu'une seule variable z dans chaque membre, & il sera aisé d'avoir son intégrale au moins par les quadratures.

Si x manque dans l'équation, on peut supposer $dx = z dy$, d'où, à cause de dx constant, on tire $0 = z ddy + dz dy$, ou $ddy = -\frac{dz dy}{z}$; donc en substituant ces valeurs de dx & de ddy , divisant par dy & multipliant par z , la proposée deviendra $A dz + B z dy + C' z^2 dy + D z^3 dy = 0$, équation du premier ordre & à deux variables y & z , qui étant intégrée fera connoître la valeur de y en z , ou celle de z en y , & substituant une de ces valeurs dans l'équation $dx = z dy$, on aura l'intégrale $x = S. z dy + C$, par où l'on déterminera la valeur de x en y . Les mêmes substitutions auront lieu & l'intégration se fera de même, quoique tous les termes de la proposée soient affectés des puissances quelconques de dx & de dy , ou de leurs produits: on voit aisément que toutes les différentielles doivent être homogènes dans tous les termes. On peut quelquefois employer la même méthode, quoique la différentielle constante ne soit ni dx , ni dy ; mais une fonction comme $y dx$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, &c.

EXEMPLE I. Soit l'équation $py^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$, dans laquelle $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, p étant une fonction de y & de constantes. Si on prend dx pour constant, à cause de $ddx = 0$, la proposée, après avoir divisé par dx , deviendra $py^3 dy dx^2 = dy du^2 - y du ddu$, dans laquelle x & u manquent. On fera donc $du = z dx$. & $d du = dz dx$; donc, par substitution, $py^3 dy dx^2 = z^2 dy dx^2 - y z dz dx^2$. Si on multiplie cette équation par le facteur $M = \frac{1}{y^3 dx^2}$, on aura $p dy = z^2 y^{-3} dy - y^{-2} z dz$. L'intégrale de cette équation sera $S. p dy = -\frac{z^2 y^{-2}}{2} + C = C - \frac{du^2}{2 y^2 dx^2}$, en substituant la valeur $\frac{du}{dx}$ de z .

Si on prend du pour constant, on a $d du = 0$; si de plus on fait $dx = z du$, & $ddx = dz du$, la proposée deviendra, en effaçant le dernier terme, $py^3 dy z^3 du^3 = z dy du^3 + y dz du^3$, ou $p dy = \frac{z dy + y dz}{y^3 z^3}$; & en intégrant, $S. p dy = C - \frac{1}{2 y^2 z^2} = C - \frac{du^2}{2 y^2 dx^2}$, comme auparavant.

EXEMPLE II. Soit encore l'équation $py^2 dy dx^2 + du ddu = 0$, dans laquelle p est une fonction de y , sans aucune autre variable, $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & la différentielle $y dx$ constante. Les variables finies u , & x manquent dans l'équation, & parce que $y dx$ est constant, je suppose $du = z y dx$. Donc $d du = y dx dz$; & par substitution, $py^2 dy dx^2 + y^2 z dz dx^2 = 0$, $p dy = -z dz$, & en intégrant $S. p dy = -\frac{zz}{2} + C =$
 $C -$

$C - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{2y^2 dx^2} \right)$, parce que $z = \frac{du}{y dx}$. Donc.

$$2y^2 dx^2 \cdot S. p dy = 2Cy^2 dx^2 - dx^2 - dy^2, \\ dy^2 = (2Cy^2 - 1 - 2y^2 \cdot S. p dy) dx^2, \& dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cy^2 - 1 - 2y^2 \cdot S. p dy)}}$$

équation dont chaque membre est une différentielle du premier ordre, & à une seule variable.

177. PROBLÈME. Intégrer l'équation différentielle du troisieme ordre $ad^3y + bdy ddy + cdxddy + fdy^3 + gdx dy^2 + hdx^2 dy + kdx^3 = 0$, dans laquelle les variables finies x & y manquent à la fois, & dx est constant. On fera $dy = zdx$; donc $ddy = dz dx$, & $d^3y = d dz dx$; donc par substitution, & divisant par dx , la proposée deviendra $addz + bz dz dx + c dx dz + f d dz + g z^2 dx^2 + h z dx^2 + k dx^2 = 0$, équation du second ordre à deux variables z & x , dans laquelle la variable finie x manque. On trouvera donc, par la méthode du problème précédent, l'intégrale de cette équation, qui fera connoître la valeur de z en x . Substituant cette valeur dans $z dx$, l'équation $dy = z dx$, aura les variables séparées, & en intégrant on aura $y = S. z dx + C$, équation qui fera connoître la valeur de y en x .

On intégrera de la même maniere & par les mêmes substitutions lorsque les puissances de dx , dy , ddy , ou leurs produits se trouveront dans les termes de la proposée. Soit l'équation $dyddy d^3y + 2 dx dy ddy^2 - dx^2 dy^4 - 3 dx^6 = 0$,

dans laquelle dx est constant, & qui ne contient aucune des variables finies x, y . On supposera donc $dy = z dx$, ce qui donne $ddy = dz dx$, $d^3 y = ddz dx$. C'est pourquoi par substitution & en divisant par dx^3 , on aura $z dz ddz + 2z dz^2 dx - z^4 dx^3 - 3 dx^3 = 0$, équation qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (176), en faisant $dz = u dx$, $ddz = du dx$; car en substituant & divisant par dx^2 , l'on trouve $z u du + 2z u^2 dx - z^4 dx - 3 dx = 0$, ou en mettant $\frac{dz}{u}$ au lieu de dx , & ôtant les fractions, $z u^2 du + 2u u z dz - z^4 dz - 3 dz = 0$, équation du premier ordre à deux variables z & u , dont l'intégrale donnera la valeur de u en z . Cette valeur substituée dans $dx = \frac{dz}{u}$

donnera $x = S. \frac{dz}{u} + C$. après l'intégration,

par le moyen de cette équation, on aura z en x , & substituant cette valeur dans l'équation $dy = z dx$, & intégrant, on aura y en x .

178. PROBLÈME. Intégrer l'équation du troisième ordre $A d^3 y + B dx ddy + C dx^3 = 0$, dans laquelle dx est constant & les coefficients A, B, C des fonctions de x & de constantes, ou 0. La supposition de $dy = z dx$ change la proposée en celle-ci $A d dz + B dz dx + C dx^2 = 0$, équation du second ordre à deux variables x & z , dans laquelle la variable finie z manque. On cherchera donc par la méthode ci-dessus (176), la valeur

de z en x , qu'on substituera dans l'équation $dy = z dx$, équation qui, en intégrant, donnera la valeur de y en x . L'intégration se fera de la même manière lorsque les puissances, ou bien des fonctions de dx , & de ddy se trouveront dans quelque terme que ce soit de la proposée, pourvu que dy ne s'y trouve pas.

179. PROBLÈME. Intégrer l'équation du quatrième ordre $a d^4 y + b dx d^3 y + c dx^2 d^2 y + f dx^3 = 0$, dans laquelle les variables finies x & y manquent, ou dans laquelle les coefficients a, b, c, f sont des constantes, ou zéro, dx étant constant. Si l'on fait $dy = z dx$, & qu'on substitue les valeurs de $d^4 y, d^3 y, d^2 y$ que donne cette supposition, la proposée, en divisant par dx , deviendra $a d^3 z + b d d z dx + c d z dx^2 + f dx^3 = 0$, équation qui s'intègre par la méthode du problème ci-dessus (177). Supposant qu'on ait trouvé la valeur de z en x ; en intégrant l'équation $dy = z dx$, on aura la valeur de y en x .

Cette méthode peut s'appliquer aux équations différentielles à deux variables du cinquième ordre, dans lesquelles dx étant constant, les variables x & y , avec les différences $dy, d^2 y$ & leurs fonctions manquent. On peut de-là passer aux différentielles des ordres supérieurs & trouver pour chaque ordre les conditions nécessaires pour qu'une équation soit intégrable par cette méthode.

180. On peut aussi ramener plusieurs équations aux méthodes précédentes, & cela en prenant pour

constante une différentielle telle qu'elle fasse disparaître tous les termes qui empêcheroient l'équation d'être comprise dans la forme des équations qu'on vient de traiter dans les problèmes précédens.

Soit l'équation $y dx ddx + 2x dy ddy = dx^3 - dx dy^2$. Si on prend dx pour constant, on aura $2x dy ddy = dx^3 - dx dy^2$, équation dans laquelle y manque, & qui est intégrable par notre méthode. Si on suppose dy constant, on trouvera une équation sans x qui sera encore intégrable.

On peut aussi, par des substitutions, ramener plusieurs équations à notre méthode.

Soit l'équation $x^2 ddx = y ddy + dy^2 + y^2 dy^2$, en supposant $y dy = dz$, ou $\frac{y^2}{2} = z$, on aura $y ddy + dy^2 = ddz$, & l'équation proposée deviendra $x^2 ddx = ddz + dz^2$, équation dans laquelle la variable finie z ne se trouve pas, & qui est intégrable par la méthode du problème ci-dessus (176).

181. LEMME. e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, si on fait $x = e^{bu}$, h étant une constante & u variable, on aura $dx = he^{bu} du$, $ddx = he^{bu} (ddu + h du^2)$, $d^3x = he^{bu} (d^3u + 3h du ddu + hh du^3)$, &c. Puisque $x = e^{bu}$, on aura $L. x = L. e^{bu} = hu$. $L. e = hu$; donc en différenciant, $d. L. x$ ou $\frac{dx}{x} = h du$; $dx = hx du = he^{bu} du$; & en différenciant encore, $ddx = hx ddu + h dx du$

$\equiv h e^{hu} ddu + h h e^{hu} du^2 \equiv h e^{hu} (ddu + h du^2)$, & ainsi de suite ; donc &c.

182. COROLLAIRE I. Si on suppose dx constant ou $ddx = 0$, on aura $ddu = -h du^2$,

183. COROLLAIRE II. Si on suppose $y = e^{ku} t$, k étant constant & t variable, il viendra $dy = t de^{ku} + e^{ku} dt = kte^{ku} du + e^{ku} dt = e^{ku} (kt du + dt)$, & en prenant les secondes différences on trouvera $ddy = e^{ku} \times (kt ddu + kkt du^2 + 2k dt du + ddt)$.

184. COROLLAIRE III. Si dans une équation à deux variables x & y , on suppose $x = e^{hu}$ & $y = e^{ku} t$, & qu'on substitue les valeurs qu'on tire de ces suppositions à la place de x , y , dx , ddx , dy , ddy , &c. L'équation sera transformée en une autre telle que la variable finie u ne se trouvera que dans les exposans de e . Maintenant si la proposée est telle qu'on puisse faire disparaître les quantités exponentielles dans l'équation transformée, elle deviendra une équation à deux variables u & t , dans laquelle la variable finie u manquera, & qui ne contiendra d'autres différentielles que du , dt , & les différences ddu , ddt , &c. On peut intégrer, par cette méthode,

1°. Toutes les équations à deux termes comprises dans la formule $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$.

2°. Toutes les équations dont tous les termes sont homogènes par rapport aux variables x , y &

leurs différences $dx, dy, ddx, ddy, \&c.$
 8^o . Toutes les équations dans lesquelles la somme
des exposans d'une même variable x & de ses
différentielles est la même dans chaque terme.

185. PROBLÈME. Intégrer l'équation $ax^m dx^p =$
 $y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx est constant.

En supposant $x = e^{hu}$, $y = e^{ku}$, & fai-
sant attention que $ddu = -hdu^2$; par les
substitutions, & les opérations ordinaires, la pro-
posée deviendra $ah^p e^{mhu} + phu du^p =$
 $e^{nku + pku - ku} t^n (kt du + dt)^{p-2} (ddt +$
 $2kdt du + (kk - kh).t du)$. Pour faire
disparoître les quantités exponentielles, je sup-
pose les exposans de e (dans les deux membres
de l'équation) égaux; donc en divisant chaque
membre par l'exponentielle qu'il renferme, on
aura une équation sans exponentielles. Il faut
donc supposer $mhu + phu = nku + pku - ku$,

ou $\frac{h}{k} = \frac{n + p - 1}{m + p}$, & l'on peut prendre pour

l'une des constantes h ou k , tel nombre qu'on
voudra & déterminer l'autre par l'équation qu'on
vient de trouver. Si l'on fait $h = n + p - 1$, somme
des exposans de y & de ses différences dans le
terme $y^n dy^{p-2} ddy$; (car ddy est censé avoir 1
pour exposant), on aura $k = m + p$, somme
des exposans de x & de dx dans le terme $ax^m dx^p$;

Si on prend $k = 1$, on aura $h = \frac{n + p - 1}{m + p}$.

Supposant maintenant qu'on ait divisé l'équation

transformée par la quantité exponentielle qu'on suppose être la même dans les deux membres, on aura $ah^p du^p = t^p (k du + dt)^{p-2} \cdot (ddt + 2k dt du + (kk - kh).t du^2) \dots (A)$, équation dans laquelle la variable finie u manque.

En supposant $du = z dt$, on aura $ddu = dz dt + z ddt$, & par la supposition de dx constant & de $du = z dt$, on a $ddu = -h du^2 = -h z z dt^2 = dz dt + z ddt$; donc $ddt = -h z dt^2 - \frac{dz dt}{z}$. Substituant dans

l'équation A les valeurs de du & de ddt , multipliant par z & divisant par dt^{p-1} , on aura $ah^p z^{p+1} dt = t^p (k z t + 1)^{p-2} ((2k-h).zz dt + (kk - kh) z^3 dt - dz) \dots (B)$, équation du premier ordre à deux variables z & t , dont on cherchera l'intégrale par les règles ci-dessus, après avoir substitué les valeurs de k & de h qu'on aura déterminées. Cette intégrale étant supposée connue, on aura la valeur de z en t , & substituant cette valeur dans $z dt$, on cherchera $S. z dt$; mais $du = z dt$; donc $u = S. z dt$, & $x = e^{bu} = e^{b S. z dt}$.

Exemple I. On propose de réduire au premier ordre l'équation $x dx dy = y ddy$, dans laquelle dx est constant. Pour la comparer à la formule générale, je la divise par dy & j'ai $x dx = y dy - \frac{1}{2} ddy$, comparant maintenant cette équation ainsi réduite à la formule $a x^m dx = y^n dy^{p-2} ddy$, j'ai $m = 1$, $a = 1$, $n = 1 = p$,

$\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = \frac{1}{2}$. Donc si l'on prend $k=1$, on aura $h = \frac{1}{2}$, & substituant ces valeurs dans l'équation B, on aura $-\frac{1}{2} z^2 dt = t(zt+1)^{-1} \left(\frac{3}{2} z z dt + \frac{1}{2} z^3 dt - dz \right)$; ou en multipliant par $2.(zt+1)$, $z^3 t dt + z^2 dt = 3z^2 t dt + z^3 t dt - x t dz$.

EXEMPLE II. Soit l'équation $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{y dy}$ dans laquelle dx est constant, qu'on veut réduire au premier ordre, je lui donne cette forme $ax^{-1} dx = y^{-1} dy^{-1} ddy$. En comparant avec la formule générale, on trouve $m=-1$, $p=1$, $n=-1$; donc $\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = -\frac{1}{0}$, nombre infini; d'où l'on conclut que la méthode ne peut servir dans cet exemple, mais alors la réduction au premier ordre est facile. En effet, on a $ay dy dx = x ddy$; or dx étant constant, l'intégrale du premier membre est $\frac{ay^2 dx}{2}$, & celle du second est $x dy - y dx$. car en différenciant cette dernière quantité dans la supposition de dx constant, il vient $x ddy + dx dy - dy dx = x ddy$. On aura donc $\frac{ay^2 dx}{2} = x dy - y dx + C dx$, C étant une constante.

Il est aisé de voir que l'équation $y^2 ddy = x dx dy$, qui a embarrassé autrefois les plus grands Géomètres, se réduit facilement par la méthode du problème. Passons au second cas.

186. PROBLÈME. Intégrer les équations différentielles qui se rapportent à la formule générale $ax^m y^{n-1} dx^2 dy^{2-1} + bx^p y^{q-1} dx^2 dy^{2-1} + \&c.$

$\equiv ddy$, dans laquelle dx est constant, & la somme des dimensions des variables x & y & de leurs différences dx , dy , ddy est la même dans chaque terme. En faisant $x \equiv e^u$, $y \equiv e^{ut}$, éliminant, au moyen de ces suppositions, x , y , dy , dx , & ddy ; faisant de plus attention que dx étant constant, on a $ddu = -hdu^2$, la proposée devient, après les opérations ordinaires $e^u (ddt + 2dudt) \equiv ae^{u-t} du^p (tdu + dt)^{2-p} + be^{u-t} du^q (tdu + dt)^{2-q} + \&c.$ ou en divisant par e^u , $ddt + 2dudt \equiv at^{-m-1} du^p (tdu + dt)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q (tdu + dt)^{2-q} + \&c.$ équation du second ordre & à deux variables u & t , dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas.

On fera donc $du = zdt$, ou $u = S.zdt$; ce qui donne $x \equiv e^u \equiv e^{S.zdt}$, & $y \equiv e^{ut} \equiv e^{S.zdt^2}$, $ddu = zddt + dzdt$. Mais on a vu ci-dessus que dx étant constant, $ddu = -hdu^2$, & ici $h = 1$; donc $ddu = -du^2 = -z^2 dt^2 = zddt + dzdt$, & $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$; donc en substituant & multipliant par z , on aura l'équation $zzdt - dz = at^{-m-1} z^{p+1} dt (2t+1)^{2-p} + bt^{-n-1} z^{q+1} dt (zt+1)^{2-q} + \&c.$ équation du premier ordre à deux variables z & t ; dont on cherchera l'intégrale par les règles ci-dessus.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^2 dx^3 + x^2 dy^3 - yx dx dy^2 - yx dy dx^2 + yx^2 dxddy - xy^2 dxddy = 0$, qui est dans le cas du problème, puisque dx est constant & que la somme des dimensions de x , y , dx , dy , ddy

est la même, savoir y , dans tous les termes. En supposant comme dans la solution du problème $x=e^u$, $y=e^{ut}$, éliminant par ces suppositions x, y, dx, dy, ddy , la proposée devient, après les réductions ordinaires, la transformée $dt^3 + 2tddt^2 - t^2dtdu^2 + tddu^2 + tduddt - t^2duddt = 0 \dots (A)$, dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas. On fera donc $du = zdt$, d'où l'on tirera, comme dans la solution du problème $ddu = -du^2 = -z^2dt^2 = dzdt + zddt$, & $ddt = -zdt^2 = -\frac{dzdt}{z}$. En substituant ces valeurs dans l'équation A, l'on trouvera aisément l'équation du premier ordre $(t^2 - 1)dz + 2tzdt + dt = 0$, qui est dans le cas du problème ci-dessus (128), & qui étant intégrée par la méthode de ce problème, donne $(t-1)^2z + t - L.t = C$. Mais $du = zdt$, ou $z = \frac{du}{dt}$; donc en substituant cette valeur de z , multipliant par dt , transposant & divisant, il viendra $du = \frac{Cdt - tdt + dt.L.t}{(t-1)^2}$, & en intégrant, $u = \frac{t-C-tL.t}{t-1} + C'$. Mais $x=e^u$, ou $L.x = u L.e = u$, $y = e^{ut}$, $y = xt$, & $t = \frac{y}{x}$; ainsi notre intégrale devient $L.x = \frac{\frac{y}{x} - C - \frac{y}{x} L.\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} + C'$ $= \frac{y - Cx - yL.y + yL.x - C'x + C'y}{y - x}$. Supposant $C + C' = m$, $1 + C' = n$, ôtant la fraction, transposant & réduisant, il viendra $ny - mx = yL.y - xL.x$. Venons au troisième cas.

187. PROBLÈME. Intégrer les équations différentielles qui se rapportent à la formule générale

$dx^m ddy = Px^{m+2} dy^{m+2} + Qx^{m+1} dx^m dy^{m+2} +$
 $+ Rx^{m+1} dx^m dy^{m+2} + \&c.$, dans laquelle
 dx est constant & dont la somme des exposans
de x & de dx est la même dans tous les termes,
 P, Q, R , &c. étant des fonctions de y . Suppo-
sant $x = e^u$, on aura $dx = e^u du$: car $L.x =$
 u , $L.e = u$, & $d.L.x = \frac{dx}{x} = du$, ou $dx =$
 $x du = e^u du$. Donc en substituant & divisant
ensuite par e^{m+2} , la proposée deviendra $du^m ddy$
 $= P dy^{m+2} + Q du^m dy^{m+2} +$
 $R du^m dy^{m+2} + \&c.$ équation dans laquelle
la variable finie u ne se trouve pas. On fera donc
 $du = z dy$, & l'on aura $ddu = \frac{dz}{z} du =$
 $\frac{dz}{z} dy = \frac{dz dy}{z}$. Si l'on substitue ces valeurs
dans la transformée & qu'on divise par dy^{m+2} , on
aura $\frac{du^m}{z} dy = \frac{du^{m+1}}{z} dz = P dy +$
 $Qz^m dy + Rz^m dy$ &c. équation du premier
ordre à deux variables z & y , dont on cher-
chera l'intégrale par les règles connues. Cette
intégrale étant supposée trouvée, on aura la va-
leur de z en y qu'on substituera dans l'équation
 $du = z dy$; & parce que $L.x = u$, il viendra
 $L.x = S. z dy$, équation qui ne contiendra que
les variables x & y .

EXEMPLE. Soit l'équation $2a dx^2 dy + ax dx ddy =$
 $2x dx dy^2 + 2x^2 y ddy$, dans laquelle dx est const-
tant & la somme des exposans de x & de dx est 2
dans tous les termes: les coefficients $2a$, & a des

termes où se trouve dy , sont des fonctions de y^0 , & de constantes.

Supposant $x = e^z$ & $du = z dy$, on aura $dx = e^z \cdot z dy$, & $ddz = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$. Substituant ces valeurs de x , dx , ddz dans la proposée, divisant par $dy^2 e^{2z}$ & réduisant, on a $az^2 dy - a dz = -\frac{2 dz}{z}$, ou $adz = \frac{a dz}{zz} - \frac{2 dz}{z^3}$; & en intégrant, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C \dots (A)$. On aura, par cette intégrale, la valeur de z en y , & la substituant dans la différentielle $z dy$, on aura l'intégrale $L. x = S z dy$. On peut parvenir à une équation différentielle du premier ordre par l'équation $L. x = S. z dy$: car en différenciant, on a $\frac{dx}{x} = z dy$, $z = \frac{dx}{x dy}$, & substituant cette valeur de z dans l'intégrale A , on trouvera, après les opérations ordinaires, $ay dx^2 = x x dy^2 - ax dx dy + C dx^2$.

188. PROBLÈME. Intégrer l'équation $dx^{m-1} ddx = Ax^m dy^{n+1} + Bx^{m-n} dx^m dy^{n-n+1} + Dx^{m-n} dx^p dy^{n-p+1} + \text{Etc.}$ dans laquelle dy est constant, A , B , D , &c. sont des fonctions de y , la somme des exposans de x & de ses différences dx , ddx est m dans tous les termes. Supposant $x = e^u$, on aura $dx = e^u du$, $ddx = e^u (ddu + du^2)$, substituant ces valeurs dans la proposée & divisant par e^{mu} , il vient $du^{m+1} + du^{m-1} ddu = A dy^{n+1} + B du^n dy^{n-n+1} + D du^p dy^{n-p+1} + \text{Etc.}$ équation dans laquelle u ne se trouve pas. On supposera donc $du = z dy$, ce qui donnera $ddu = dz dy$, à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la transformée & divisant par dy^n ,

on a $z^{m+1} dy + z^{m-1} dz = A dy + Bz^n dy + D z^p dy + \&c.$ équation du premier ordre, dont on cherchera l'intégrale par les règles connues.

EXEMPLE. Soit proposée l'équation $z dx dy = a ddx - y ddx$, ou $x^0 ddx = \frac{2 dx dy}{a-y}$, dans laquelle dy est constant, la somme des exposans de x & de ses différences est 1 dans chaque terme, & le coefficient $\frac{2}{a-y}$ du terme où se trouve dy , est une fonction de y . On fera $x = e^u = e^{S. z dy}$ (en supposant $du = z dy$), $dx = e^{S. z dy} z dy$, $ddx = e^{S. z dy} (z^2 dy^2 + z ddy + dz dy) = e^{S. z dy} (z^2 dy^2 + dz dy)$ à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la proposée, on trouve, après avoir divisé par dy , $z dy = a z^2 dy + a dz - z z y dy - y dz$, équation du premier ordre. Si on met la proposée sous cette forme $z dx dy + y ddx = a ddx$, on aura en intégrant dans la supposition de dy constant, $y dx + x dy = a dx + C dy$.

189. Les méthodes précédentes peuvent s'appliquer aux équations différentielles de tous les ordres, pourvu qu'elles puissent se rapporter aux cas dont on a parlé ci-dessus (184). Soit l'équation générale $A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{N d^n y}{dx^n} = 0$, dans laquelle les coefficients $A, B, C, \&c.$ ayent les conditions requises, dx étant constant. Supposons $du = z dx$, $y = e^u = e^{S. z dx}$, on aura $dy = e^{S. z dx} z dx$, $\frac{dy}{dx} = e^{S. z dx} z$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^{S. z dx} \left(z z + \frac{dz}{dx} \right)$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{S. z dx} \left(z^3 + \frac{3 z dz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2} \right)$; &c. Substituant ces valeurs dans la proposée, elle sera divisible par $e^{S. z dx}$;

& elle deviendra de l'ordre $n - 1$. Il est évident qu'en supposant égaux à 0 tous les coefficients, excepté ceux des deux termes qu'on veut réduire à un ordre inférieur, on aura une équation à deux termes qu'on tâchera de réduire en imitant ce qu'on a fait ci-dessus pour les équations qui se rapportent au premier cas. Pour les autres cas, on déterminera les coefficients, de manière que les termes aient les conditions nécessaires.

190. La méthode dont nous avons parlé ci-dessus (147) peut facilement s'appliquer aux équations des ordres supérieurs, c'est-à-dire, que si l'on a un nombre N d'équations différentielles renfermant le nombre $N + 1$ de variables $t, x, y, z, u, \&c.$ chaque équation pouvant se réduire à la forme suivante (H).....

$$0 = k + ax + by + cz + \&c. + \frac{a' dx}{dt} + \frac{b' dy}{dt} + \frac{c' dz}{dt} + \&c. + \frac{a'' ddx}{dt^2} + \frac{b'' ddy}{dt^2} + \frac{c'' d dz}{dt^2} + \&c. + \frac{a''' d^3 x}{dt^3} + \frac{b''' d^3 y}{dt^3} + \&c. + \frac{A d^n x}{dt^n} + \frac{B d^n y}{dt^n} + \frac{C d^n z}{dt^n} + \&c.$$

dans laquelle dt est constant, k une fonction de $t, a, b, \&c., a', b', \&c., a'', b'', \&c., a''', b''', \&c., A, \&c.$ sont des constantes quelconques ou 0, on pourra intégrer ces équations par la méthode (du N^o. 147), en supposant

$$dx = p dt, ddx = q dt^2, d^3 x = r dt^3, \&c. \text{ jusqu'à } d^{n-1} x = s. dt^{n-1}; \& \text{ de même } dy = p' dt, ddy = q' dt^2, \&c.$$

$$dz = p'' dt, d dz = q'' dt^2, \&c. \text{ Or } dt \text{ étant constant,}$$

$$\text{de l'équation } dx = p dt, \text{ on tire } ddx = dp dt = q dt^2,$$

$$d ddx = dq dt^2 = r dt^3, \&c. \text{ Donc en substituant \& réduisant, l'équation H devient}$$

$$0 = k + ax + by + cz + \&c. + \frac{a' dx}{dt} + \frac{b' dy}{dt} + \frac{c' dz}{dt} + \&c. + \frac{a'' dp}{dt} +$$

$$\frac{b'' dp'}{dt} + \frac{c'' dp''}{dt} + \&c. + \frac{a''' dq}{dt} + \frac{b''' dq'}{dt} + \&c. +$$

$$\frac{A ds}{dt} + \frac{B ds'}{dt} + \frac{C ds''}{dt} + \&c. \text{ équation du pré-}$$

mier ordre. On aura de plus autant d'équations de la forme requise (147) qu'on aura introduit de nouvelles variables $p, p', p'', \&c. q, q', \&c$ dans la formule (H). Car puisque $dx = p dt$, on aura $dx - p dt = 0$, & parce que $d dx = q dt^2 = dp dt$, on aura $dp = q dt$ & $dp - q dt = 0$, &c. On a de même $dy - p' dt = 0$, $dp' - q' dt = 0$, &c. Donc en multipliant toutes ces équations excepté une par des constantes indéterminées, on les intégrera par la méthode ci-dessus (N°. 147).

Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre $T d dx + a T dx dt + b x T dt^2 + T' dt^2 = 0$, dans laquelle dt est constant & T, T' sont des fonctions de t . Divisant cette équation par $T dt^2$ & supposant $\frac{T'}{T} = k$,

on lui donne la forme (H) $0 = k + b x + \frac{a dx}{dt} + \frac{d dx}{dt^2}$. On fera donc $dx = p dt$; ce qui donne $d dx =$

$dp dt$, & substituant cette valeur de dx dans l'équation H, on aura, en ôtant les fractions, $dp + a dx + b x dt + k dt = 0$. On a de plus l'équation $dx - p dt = 0$: ces équations ont les conditions qu'exige la méthode (du N°. 147). Multipliant la seconde par la constante indéterminée A , ajoutant le produit à la première, on aura $dp + (A + a) dx + (bx - Ap) dt + k dt = 0 \dots (M)$. On supposera ensuite, suivant la méthode, $bx - Ap = mp + m(A + a)x \dots (P)$, m en étant une constante indéterminée; & comparant terme à terme les deux membres de cette équation, on aura $bx = m(A + a)x$, & $-Ap = mp$, d'où l'on tire $m = -A$, & $m = \frac{b}{A + a} =$

$-A$; donc $A^2 + aA = -b$, & $A = \frac{-a \pm \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$,

ce qui donne deux valeurs de A que nous exprimerons par A & A' , & aussi deux valeurs correspondantes de m que nous désignerons par m & m' . En substituant ces valeurs dans l'équation P, & supposant $p + (A + a)x = u$, $p + (A' + a)x = u'$, l'équation M sera changée en ces

deux autres $du + mudt + kdt = 0$, & $du' + m' u' dt + kdt = 0$, qu'on intégrera par le (N°. 128). On trouvera donc u & u' en t , & ensuite les deux équations $p + (A + a)x = u$, $p + (A' + a)x = u'$, donneront la valeur de x en t .

Soit maintenant l'équation du troisième ordre $Td^3x + aTddxd t + bTdxdt^2 + cxTdt^3 + T'dt^3 = 0$, dans laquelle dt est constant. En divisant par Tdt^3 & faisant $\frac{T'}{T} = k$, on trouvera aisément l'équation $0 = k + cx + \frac{b dx}{dt} + \frac{a ddx}{dt^2} + \frac{d^3 x}{dt^3}$, qui a la forme requise. On supposera donc $dx = p dt$, $ddx = q dt^2 = dp dt$, $d^3 x = dq dt^2$, d'où l'on tirera $0 = k + cx + \frac{b dx}{dt} + \frac{a dp}{dt} + \frac{dq}{dt}$, ou $dq + a dp + b dx + cx dt + kdt = 0$. On a de plus $dx - p dt = 0$, & $dp - q dt = 0$; or ces trois équations sont susceptibles de la méthode du (N°. 147). En suivant cette méthode & multipliant la seconde par A & la troisième par B , ajoutant ensuite les trois équations, &c. désignant par m, m', m'' les trois valeurs de m qu'on aura dans ce cas, on parviendra aux trois équations $du + m u dt + kdt = 0$, $du' + m' u' dt + kdt = 0$, $du'' + m'' u'' dt + kdt = 0$, qu'on intégrera par la méthode du (N°. 128). On trouvera les valeurs de u , de u' & de u'' en t , & l'on aura de plus les trois équations $q + (a + B)p + (b + A)x = u$, $q + (a + B')p + (b + A')x = u'$, $q + (a + B'')p + (b + A'')x = u''$, dans lesquelles A, A', A'' , désignent trois valeurs de A , & B, B', B'' les trois valeurs correspondantes de B . Ces équations donneront les valeurs de x en t .

Soit proposé maintenant d'intégrer les équations suivantes du second & du troisième degré :

$$0 = k + ax + by + \frac{c dx}{dt} + \frac{f dy}{dt} + \frac{d dx}{dt^2},$$

$$0 = k' + gx + \frac{h dy}{dt} + \frac{d^3 y}{dt^3} \quad e$$

dans

dans lesquelles dt est constant, & k, k' des fonctions de t . On fera $dx = p dt$, $ddx = dp dt$, $dy = q dt$, $ddy = r dt^2 = dq dt$, $d^3 y = dr dt^2$; donc $dq dt = r dt^2$. Substituant $dp dt$ au lieu de ddx , & $dr dt^2$ au lieu de $d^3 y$, dans les équations proposées, on trouvera facilement les transformées $dp + c dx + f dy + (ax + by) dt + k dt = 0$, $dr + h dy + g x dt + k' dt = 0$. On aura de plus les trois équations suivantes $dx - p dt = 0$; $dy - q dt = 0$; $dq - r dt = 0$. Ces cinq équations ayant les conditions que demande la méthode ci-dessus (147), on multipliera la seconde par A , la troisième par B , la quatrième par C & la cinquième par D , A, B , &c. sont des constantes indéterminées. Ajoutant ensuite toutes ces équations, on aura la somme (H) $\dots dp + Ddq + A dr + (c + B) dx + (f + hA + C) dy + (ax + gAx + by - Bp - Cq - Dr) dt + (k + Ak') dt = 0$. Ensuite m étant un facteur constant & indéterminé, on supposera, selon la méthode, $(a + gA)x + by - Bp - Cq - Dr = m[p + Dq + Ar + (c + B)x + (f + hA + C)y] = mu$. En développant le second membre de cette équation & égalant les termes homologues, on aura les équations suivantes: $m = -B$; $mD = -C$; $mA = -D$; $m(c + B) = a + gA$; $m(f + hA + C) = b$, & l'équation H deviendra $du + m u dt + (k + Ak') dt = 0$, qu'on pourra intégrer par la méthode ci-dessus (128), après avoir déterminé les valeurs de A & de m par les équations qu'on vient de trouver, ce qui est facile: car puisque $B = -m$, $D = -mA$, & $C = -mD = mM A$, si on substitue ces valeurs de B , de C & de D dans les deux équations $m(c + B) = a + gA$; $m(f + hA + C) = b$, elles deviendront $m(c - m) = a + gA$, & $m(f + hA + mM A) = b$, d'où l'on tire $A = \frac{Cm - m^2 - a}{g} =$

$\frac{b - fm}{hm + mmm}$, & de - là une équation du cinquième degré qui donnera cinq valeurs de m , d'où l'on déduira cinq valeurs correspondantes pour chacun des facteurs A, B, C, D . On fera le reste comme dans les exemples précédens, au moyen des deux équations $du + m u dt + (k + Ak') dt = 0$, & $p + Dq + Ar + (c + B)x + (f + hA + C)y = u$.

191. PROBLÈME. Trouver l'intégrale finie & complete de l'équation du second ordre $0 = -y + \frac{x dy}{dx} + \frac{ax ddy}{dx^2}$. Si l'on fait $y = cx + xz$

(c étant une constante arbitraire) & qu'on substitue dans la proposée les valeurs de y , dy & ddy que donne cette supposition, il viendra, après les opérations ordinaires, $0 = x dz dx + 2a dz dx + ax d dz$, & en divisant par $ax dz$, $0 = \frac{dx}{a} + \frac{2dx}{x} + \frac{ddz}{dz}$, ou $\frac{2dx}{x} + \frac{ddz}{dz} = -\frac{dx}{a}$.

En intégrant & ajoutant la constante $L.B dx$, on a $2.L.x + L.dz = L.B dx - \frac{x}{a}$, ou

$$L.x^2 dz = L.B dx - \frac{x}{a}. L.e = L.B e^{-\frac{x}{a}} dx;$$

$$\text{donc } x^2 dz = B e^{-\frac{x}{a}} dx; dz = \frac{B e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx} \dots (A),$$

$$\text{\& en intégrant encore, } z = B.S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx};$$

donc l'intégrale complete sera $y = cx +$

$$B x S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}, \text{ qui renferme deux constantes}$$

arbitraires comme il convient. En général l'intégrale finie & complete d'une équation d'un ordre n doit contenir un nombre n de constantes arbitraires : car en supposant dx constant, à chaque intégration que l'on fera, on doit ajouter une constante; donc puisqu'on doit faire n intégra-

tions, on doit avoir n constantes. On n'a pas ajouté de constante en intégrant l'équation A, parce qu'elle étoit inutile : car si on fait $z = D$

+ B. S. $\frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, on aura pour l'intégrale

complete $y = cx + Dx + Bx.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, qui se réduira à la forme ci-dessus en faisant $c + D = A'$, & changeant ensuite A' en c .

Si l'on avoit l'équation $aa dy + yy dx = (aa + xx) dx$, en supposant $y = x + z$ & éliminant y & dy , on trouveroit l'équation $aa dz + 2zx dx + zz dx = 0$, qui étant intégrée par la méthode du (n°. 128), donnera $z =$

$\frac{Caa.e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + C.S.e^{-\frac{xx}{aa}} dx}$. Mais, par supposition, $y = x + z$; donc l'intégrale complete fera $y =$

$x + \frac{Caa.e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + C.S.e^{-\frac{xx}{aa}} dx}$. Si on fait $C = 0$, on aura $y = x$, intégrale particulière de la proposée.

192. Si une valeur particulière de $y = p$ rend la différentielle $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cdd y}{dx^2} \&c.$

égale à 0, on aura aussi $y = ap$, a étant une constante arbitraire, & en substituant ap au lieu de y , la différentielle sera aussi égale à 0; car

$$\text{on aura } Aap + \frac{B a dp}{dx} + \frac{C a ddp}{dx^2} + \&c. = 0.$$

Puisque cette différentielle est le produit de a par

$$Ap + \frac{B dp}{dx} + \frac{C ddp}{dx^2} + \&c., \text{ \& qu'on suppose}$$

que cette dernière quantité est $= 0$. De même si la supposition de $y = q$, rend la différentielle proposée $= 0$, en substituant bq au lieu de y , la différentielle sera encore $= 0$. Il en sera de même en substituant $ap + bq$ au lieu de y : car

$$\text{si on a les deux quantités } Aap + \frac{B a dp}{dx} +$$

$$\frac{C a ddp}{dx^2} + \&c., \text{ \& } Abq + \frac{B b dq}{dx} + \frac{C b ddq}{dx^2} + \&c.$$

dont chacune est $= 0$, leur somme sera aussi $= 0$; or en substituant $ap + bq$ au lieu de y , on a la somme des quantités précédentes; donc &c.

De même si $p, q, r, s, \&c.$ sont des valeurs particulières de y , qui rendent notre différentielle

$$= 0, y = ap + bq + cr + fs + \&c.$$

sera une intégrale de notre différentielle, & si

notre différentielle est du quatrième ordre seu-

lement, l'intégrale $y = ap + bq + cr + fs$,

qui contiendra quatre constantes indéterminées $a,$

b, c, f , sera l'intégrale complète & finie de

$$\text{l'équation } 0 = Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} +$$

$$\frac{D d^3 y}{dx^3} + \frac{E d^4 y}{dx^4}.$$

193. Soit l'équation générale $0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \dots + \frac{N d^n y}{dx^n} \dots$ (H)

dans laquelle la différentielle dx & tous les coefficients $A, B, \&c.$ sont des constantes. Si l'on suppose $y = e^{hx}$, h étant une constante & $L.e = 1$, on aura $L.y = hx$, $L.e = hx$, $\frac{dy}{y} = h dx$, $dy = h y dx = h dx e^{hx}$, $\frac{dy}{dx} = h e^{hx}$; & en supposant dx constant on trouvera $\frac{ddy}{dx} = h^2 \cdot e^{hx} dx$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = h^2 e^{hx}$. On en aura aussi $\frac{d^3 y}{dx^3} = h^3 e^{hx}$, & en général $\frac{d^n y}{dx^n} = h^n e^{hx}$. Substituant ces valeurs dans

l'équation H & divisant le résultat par e^{hx} , on aura la transformée (K)..... $0 = A + B h + C h^2 + D h^3 + \dots + N h^n$, dont l'inconnue est h , & qui est du degré n . Si on suppose, que f est une des racines de cette équation de manière que l'on ait $h = f$, ou que $h - f = 0$ soit un diviseur de l'équation K, on aura $y = e^{fx}$, équation intégrale particulière de la proposée H; donc, selon ce qu'on vient de dire (192), $y = a e^{fx}$ sera une autre équation intégrale particulière de la proposée qui renfermera une constante arbitraire a . Si toutes les racines de l'équation K sont inégales & qu'on les représente

par f, f', f'', f''' , &c. respectivement, l'intégrale complète & finie de la proposée sera $y = a e^{f x} + b e^{f' x} + c e^{f'' x} + \&c.$, $a, b, c, \&c.$ étant des constantes arbitraires.

Voyons maintenant comment il faut s'y prendre lorsque l'équation K a des racines égales, c'est-à-dire, quelque facteur de cette forme $(h - f)^m = 0$. Je remarque d'abord que la relation qu'il y a entre l'équation H & l'équation K est telle, que si dans la première on écrit h^0 .

pour y , h pour $\frac{dy}{dx}$, h^2 pour $\frac{d^2 y}{dx^2}$, & en général h^m pour $\frac{d^m y}{dx^m}$, elle deviendra l'équation K ;

& que si dans celle-ci on écrit y pour h^0 , $\frac{dy}{dx}$ pour h , $\frac{d^2 y}{dx^2}$ pour h^2 , &c. on rétablira l'équation H ; d'où l'on conclut que si $h - f = 0$, ou $h - f h^0 = 0$, est un diviseur de l'équation K , on en pourra tirer l'équation $\frac{dy}{dx} - f y = 0$,

ou $\frac{dy}{y} = f dx$, dont l'intégrale $L. y = f x. L. e$, ou $y = e^{f x}$ sera une intégrale particulière de la proposée. Donc $y = a. e^{f x}$ sera aussi une intégrale de la proposée, & si l'on a le diviseur double $(h - f)^2 = 0$, ou $f f h^0 - 2 f h + h h = 0$, on en tirera, par les substitutions prescrites, l'équation différentielle $(R) \dots f f y - \frac{2 f dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

on cherchera ensuite l'intégrale finie & complete de cette équation, en faisant $y = e^{fx} u$, d'où

l'on tire $\frac{dy}{dx} = f e^{fx} u + \frac{e^{fx} du}{dx}$, & $\frac{d^2 y}{dx^2} = f^2 e^{fx} u + \frac{2 e^{fx} du}{dx} + \frac{e^{fx} d^2 u}{dx^2}$. Substituant ces valeurs

dans l'équation différentielle R, elle devient en réduisant, $\frac{e^{fx} d^2 u}{dx^2} = 0$, donc $d^2 u = 0$; donc

en intégrant, $du = b dx$, b étant une constante arbitraire, & en intégrant encore, $u = bx + a$, a étant une autre constante arbitraire. Mais on

a supposé $y = e^{fx} u$, donc on aura $y = e^{fx} (a + bx)$, valeur de y qui contient deux constantes arbitraires, & qui répond à deux racines égales de l'équation K. De même si l'équation K a un diviseur triple $(f - h)^3$, en le développant & faisant les substitutions prescrites, on en déduira l'équation $f^3 y - 3 f f' \frac{dy}{dx} + 3 f' f' \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, qui sera con-

tenue dans la proposée (H), & en supposant $y = e^{fx} u$, on trouvera par substitution, $d^3 u = 0$. En intégrant cette équation, il vient $d^2 u = 2c dx$, $2c$ étant une constante arbitraire; en intégrant de nouveau, on a $du = 2cx dx + b dx$, b étant une constante arbitraire; & en intégrant pour la troisième fois, on trouve $u = cx^2 + bx + a$, a étant encore une constante arbitraire. On aura donc $y = e^{fx} (a + bx + cx^2)$, valeur de y qui répond à trois racines égales de l'équation K. En général si le diviseur est $(f - h)^n$, on aura $y = e^{fx} (a + bx + cx^2 + Dx^3 +$

Gg +

$g x^4 \dots + k x^{m-1}$), a, b, c, D, g , &c. étant des constantes arbitraires; de sorte que cette valeur renfermera le nombre m de constantes arbitraires.

Supposons maintenant que l'équation algébrique K renferme des racines imaginaires, nous savons que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair: de plus nous avons vu ci-dessus que les racines imaginaires peuvent être représentées par la formule $M + N \sqrt{-1}$, & il est évident que si l'une des racines imaginaires d'une équation algébrique est représentée par $a + b \sqrt{-1}$, sa correspondante sera $a - b \sqrt{-1}$, autrement leur produit ne sauroit être réel. Si on suppose que V représente un arc de cercle dont le rayon soit $= 1$, & qu'une des racines imaginaires de l'équation K soit $h = m. \cos. V + m. \sin. V. \sqrt{-1}$, sa correspondante sera $= m. \cos. V - m. \sin. V. \sqrt{-1}$, donc on aura $(h - m. \cos. V - m. \sin. V. \sqrt{-1})(h - m. \cos. V + m. \sin. V. \sqrt{-1}) = h h - 2 m. \cos. V. h + m m. \cos.^2 V - m m. \sin.^2 V = 0$, ou (parce que $\sin.^2 V + \cos.^2 V$ est égal au quarré 1 du rayon,) $m m h^2 - 2 m h. \cos. V + h h = 0$, équation qui représente un diviseur réel de la proposée. Par les substitutions prescrites, je réduis ce diviseur à la forme $(P) \dots 0 = m m y - 2 m. \frac{dy}{dx} \cos. V + \frac{d^2 y}{dx^2}$. Je cherche maintenant l'intégrale corres-

pondante en supposant $y = e^{m x. \cos. V} u$, d'où l'on tire $dy = m. \cos. V. e^{m x. \cos. V} u dx + e^{m x. \cos. V} du$

$$e^{mx \cdot \cos V} du, \& ddy = mm. (\cos V)^2 \times \\ e^{mx \cdot \cos V} u dx^2 + 2m \cdot \cos V e^{mx \cdot \cos V} du dx + \\ e^{mx \cdot \cos V} ddu, \text{ l'arc } V \text{ est sensé constant. Substi-}$$

tuant ces valeurs de y, dy, ddy dans l'équation

P., réduisant & divisant par $e^{mx \cdot \cos V}$, on aura 0

$$= mm u - mm u. (\cos V)^2 + \frac{ddu}{dx^2}, \text{ ou}$$

$$mm u (1 - (\cos V)^2) + \frac{ddu}{dx^2} = 0, \text{ ou}$$

(parce que dans un cercle le quarré du sinus est égal au quarré du rayon moins le quarré du cosinus,)

$$mm. (\sin V)^2 u + \frac{ddu}{dx^2} = 0, \text{ ou } mm. (\sin V)^2 u dx^2$$

$$+ ddu = 0. \text{ En multipliant cette équation par}$$

$$2 du, \text{ on aura } 2 mm. (\sin V)^2 u du dx^2 +$$

$$2 du ddu = 0, \text{ dont l'intégrale (à cause de } dx$$

$$\text{constant), en ajoutant la constante du même ordre}$$

$$a^2 mm. (\sin V)^2 \cdot dx^2, \text{ sera } mm. (\sin V)^2 u dx^2$$

$$+ du^2 = a^2 mm. (\sin V)^2 dx^2; \text{ d'où l'on tire}$$

$$\frac{du^2}{aa - uu} = mm. (\sin V)^2 dx^2; \text{ donc}$$

$$\frac{du}{\sqrt{(aa - uu)}} = m. \sin V. dx. \text{ Mais } \frac{du}{\sqrt{(aa - uu)}} =$$

$$\frac{du}{ds} = ds \text{ élément d'un arc de cercle}$$

$$\sqrt{(1 - \frac{uu}{aa})}$$

$$\text{dont le sinus est } \frac{u}{a} \& \text{ le rayon} = 1; \text{ donc } ds =$$

$$m. \sin V. dx, \& s = mx. \sin V + B', B' \text{ étant}$$

une constante arbitraire. Mais on peut prendre la quantité $m x. \sin. V + B'$ pour un arc de cercle dont le sinus est $\frac{u}{a}$; donc on aura $\frac{u}{a} = \sin. (m x. \sin. V + B')$, ou $u = a. \sin. (m x. \sin. V + B')$. Substituant cette valeur de u dans l'équation $y = e^{m x. \cos. V} u$, on trouvera $y = a e^{m x. \cos. V} \times \sin. (m x. \sin. V + B')$, valeur de y correspondante aux deux racines imaginaires du diviseur $mm - 2 m h. \cos. V + h h = 0$, & qui contient deux constantes arbitraires a & B' .

Supposons maintenant que l'équation K ait des racines imaginaires égales entr'elles, c'est-à-dire, ait pour diviseur le quarré, le cube, ou une puissance k du facteur $mm - 2 m h. \cos. V + h h$; on aura $mm - 2 m h. \cos. V + h h = (h - m. \cos. V + m. \sin. V \sqrt{-1}) (h - m. \cos. V - m. \sin. V \sqrt{-1})$. Mais selon ce que nous avons dit ci-dessus, à la valeur de $h = f$, ou au diviseur $h - f = 0$ de l'équation K répond $y = e^{f x} a$, au diviseur $(h - f)^m$ répond $y = e^{f x} (a + b x + c x^2 \text{ \&c. })$; donc si on fait successivement f (qui est $= h$) $= m. \cos. V - m. \sin. V. \sqrt{-1}$, & $f = m. \cos. V + m. \sin. V. \sqrt{-1}$, le diviseur $h - m. \cos. V - m. \sin. V. \sqrt{-1}$, donnera la variable $y = a e^{m x. \cos. V + m x. \sin. V \sqrt{-1}}$, & le diviseur simple correspondant $h - m. \cos. V + m. \sin. V. \sqrt{-1}$, donnera $y = a' e^{m x. \cos. V - m x. \sin. V. \sqrt{-1}}$.

le produit $m m - 2 h m . \cos . V + h h$ de ces diviseurs donnant $y = a e^{m x . \cos . V + m x . \sin . V \sqrt{-1}} + a' e^{m x . \cos . V - m x . \sin . V \sqrt{-1}}$, somme des deux valeurs de y correspondante à deux diviseurs imaginaires. Mais on a vu ci-dessus que le diviseur $m m - 2 m h . \cos . V + h h = 0$, donne $y = a e^{m x . \cos . V} . \sin . (m x . \sin . V + B')$; donc $a e^{m x . \cos . V} \sin . (m x . \sin . V + B') = e^{m x . \cos . V} (a e^{m x . \sin . V \sqrt{-1}} + a' e^{-m x . \sin . V \sqrt{-1}})$; donc en divisant par $e^{m x . \cos . V}$, on aura $a . \sin . (m x . \sin . V + B') = a e^{m x . \sin . V \sqrt{-1}} + a' e^{-m x . \sin . V \sqrt{-1}}$, & en multipliant de part & d'autre par x^k , on trouve $a x^k \sin . (m x . \sin . V + B') = a x^k e^{m x . \sin . V \sqrt{-1}} + a' x^k e^{-m x . \sin . V \sqrt{-1}}$.

Supposons présentement que le quarré $(m m - 2 m h . \cos . V + h h)^2 = (h - m . \cos . V - m . \sin . V \sqrt{-1})^2 (h - m . \cos . V + m . \sin . V \sqrt{-1})^2$, soit un diviseur de l'équation K, on fera $f = m . \cos . V + m . \sin . V \sqrt{-1}$, & ensuite $f = m . \cos . V - m . \sin . V \sqrt{-1}$. Donc parce que le facteur $(h - f)^2$ donne $y = e^{f x} (a + b x)$,

le facteur $(h - m \cdot \cos. V - m \cdot \sin V \sqrt{-1})^2$;
donnera $y = e^{mx \cdot \cos. V + m x \sin. V \sqrt{-1}} \times$
 $(a + bx)$, le facteur $(h - m \cdot \cos. V + m \cdot \sin. V \sqrt{-1})^2$;
donnant $y = e^{mx \cdot \cos. V - mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} (a' + b'x)$;
donc la valeur de y correspondante au facteur
 $(mm - 2mh \cdot \cos. V + hh)^2$ fera $y = e^{mx \cdot \cos. V} \times$
 $(ae^{mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} + a'e^{-mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}}) +$
 $e^{mx \cdot \cos. V} (bx e^{mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} +$
 $b'x e^{-mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}})$. Mais , selon ce qu'on a dit
ci-dessus , $ae^{mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} + a'e^{-mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} =$
 $a \sin. (mx \cdot \sin. V + B')$ * , a & B' étant des
constantes arbitraires. Par la même raison on aura
 $bx e^{mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} + b'x e^{-mx \cdot \sin. V \sqrt{-1}} =$
 $bx \sin. (mx \cdot \sin. V + B'')$, b & B'' étant des con-
stantes arbitraires. Donc la valeur de y qui répond
au diviseur $(mm - 2mh \cdot \cos. V + hh)^2$ fera
 $y = e^{mx \cdot \cos. V} (a \sin. (mx \cdot \sin. V + B') +$
 $bx \sin. (mx \cdot \sin. V + B''))$, qui renferme quatre

* Dans le second membre de cette équation on a représenté $a + a'$ par a , dans le second membre de l'équation suivante b représente la valeur de $b + b'$ qui se trouve dans le premier membre.

constantes arbitraires, a, b, B', B'' . On trouvera de même que la valeur de y , qui répond au diviseur cube $(mm - 2mh.\cos. V + hh)^3$, est $y = e^{mx.\cos. V} (a.\sin. (mx.\sin. V + B') + bx.\sin. (mx.\sin. V + B'') + cx.\sin. (mx.\sin. V + B'''))$ qui renferme six constantes arbitraires; & en général, comme au diviseur $(h - f)^k$ répond $y = e^{fx} (a + bx + cx^2 + \dots + Nx^{k-1})$, au diviseur $(mm - 2mh.\cos. V + hh)^k$ répondra $y = e^{mx.\cos. V} (a.\sin. (mx.\sin. V + B') + bx.\sin. (mx.\sin. V + B'') + cxx.\sin. (mx.\sin. V + B''') + \&c. \dots + N'x^{k-1}.\sin. (mx.\sin. V + C'))$ qui renfermera un nombre $2k$ de constantes arbitraires, $a, b, c, \&c, B', B'', B''', \&c. N' \& C'$.

194. PROBLEME. Trouver l'intégrale complète & finie de l'équation (H) ... $0 = Ay + B \frac{dy}{dx} + C. \frac{dd y}{dx^2} + \&c. \dots + N \frac{d^n y}{dx^n}$, dans laquelle la différence dx est constante, & les coefficients $A, B, \&c.$ sont des constantes, ou 0. On écrira dans la proposée h^0 , au lieu de y , h au lieu de $\frac{dy}{dx}$, h^2 au lieu de $\frac{dd y}{dx^2}$, & généralement h^k au

lieu de $\frac{d^k y}{dx^k}$, & on formera l'équation (K),
 ou $0 = A h^0 + B h + C h^2 + \dots + N h^n$,
 du degré n ; on décomposera cette équation en
 facteurs réels $h - f = 0$, $(h - f)^k = 0$.
 On cherchera aussi les facteurs imaginaires, qui,
 pris deux à deux, donneront un facteur de la
 forme $h^2 - 2mh \cos V + mm = 0$, & s'il y
 a des racines imaginaires égales, on aura quel-
 que facteur de la forme $(h^2 - 2mh \cos V + mm)^k = 0$. Chaque facteur simple qui n'a point
 d'autre facteur égal, donnera $v = a e^{fx}$; mais
 chaque facteur composé de facteurs simples égaux
 entr'eux, comme $(h - f)^k = 0$, donnera
 $e^{fx} (a + bx + cx^2 + \dots + N' x^{k-1})$.
 Chaque facteur $h^2 - 2mh \cos V + mm = 0$, de
 deux dimensions qui n'a point d'autre facteur égal,
 donnera $y = e^{mx \cos V} (a \sin(mx \sin V + B'))$;
 chaque facteur, composé de plusieurs facteurs de
 deux dimensions égaux entr'eux, comme $(h^2 - 2mh \cos V + mm)^k = 0$, donnera $y =$
 $e^{mx \cos V} [a \sin(mx \sin V + B') +$
 $bx \sin(mx \sin V + B'') + cx^2 \sin(mx \sin V +$
 $B''') + \dots + N'' x^{k-1} \sin(mx \sin V +$
 $N''')]$. a, b , &c. $B', B'',$ &c. N''' étant des
 constantes arbitraires, V étant l'arc d'un cercle

dont le rayon $= 1$, & $m x \sin. V + B'$, $m x \sin. V + B''$, &c. étant aussi des arcs pris dans le même cercle dont le rayon $= 1$. On fera la somme de toutes ces valeurs particulières de y , & formant une équation dont un des membres soit cette somme, & dont l'autre membre soit y , cette équation sera l'intégrale complète réelle & finie de l'équation proposée (H), cela suit évidemment de ce qu'on vient de dire (193).

REMARQUE. Si l'on avoit deux facteurs $h - f = 0$, $h - f' = 0$, simples & inégaux, le premier donneroit $y = e^{f x} a$, le second $y = e^{f' x} a'$, &c. ce que nous faisons remarquer, afin qu'on ne s'imagine par que la constante a , qui répond à un diviseur simple, soit la même que celle qui répond à un autre diviseur simple qui n'est pas égal au premier, & l'on doit faire un raisonnement semblable pour les diviseurs multiples de la forme $(h - f)^k = 0$, & pour les diviseurs de deux dimensions, soit qu'ils en aient d'autres qui leur soient égaux ou non.

EXEMPLE I. Trouver l'intégrale complète & finie de l'équation différentielle du troisième ordre, $0 = y - \frac{3 g^2 d d y}{d x^2} + \frac{2 g^3 d^3 y}{d x^3}$. Par les substitutions prescrites, on aura $0 = h^3 - 3 g^2 h^2 + 2 g^3 h$, ou en divisant par $2 g^3$, & faisant attention que $h^3 = 1$, $h^2 = \frac{3 h^2}{2 g} + \frac{1}{2 g^3} = 0$. Cette équation se résout en deux facteurs.

$+ \frac{f}{2} = 0$, & $\left(h - \frac{1}{g}\right)^2 = 0$. Le premier facteur étant comparé avec le facteur $h - f = 0$, donne $f = -\frac{1}{2g}$, & $y = a e^{fx} = a e^{-\frac{x}{2g}}$. L'autre facteur étant comparé avec la formule $(h - f)^2 = 0$, donne $f = \frac{1}{a}$,

& $y = e^{\frac{x}{a}} (a' + b x)$. Donc l'intégrale complète sera
 $y = a e^{-\frac{x}{2g}} + e^{\frac{x}{a}} (a' + b x)$.

REMARQUE. Si la constante a se trouvoit dans l'équation différentielle proposée, pour plus de clarté on n'emploieroit pas la lettre a comme constante arbitraire, dans l'intégrale.

EXEMPLE II. Intégrer l'équation différentielle du quatrième ordre $0 = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$. On formera, par substitution, l'équation $0 = 1 - a^4 h^4$, ou en changeant les signes & divisant, $0 = h^4 - \frac{1}{a^4} = \left(h - \frac{1}{a}\right) \times \left(h + \frac{1}{a}\right) \left(h^2 + \frac{1}{aa}\right)$, le facteur $h - \frac{1}{a} = 0$; donne $y = a' e^{\frac{x}{a}}$, le facteur $h + \frac{1}{a} = 0$, donne $y = a'' e^{-\frac{x}{a}}$, & les deux ensemble donnent $y = a' e^{\frac{x}{a}} + a'' e^{-\frac{x}{a}}$. Le facteur $h^2 + \frac{1}{aa} = 0$, qui renferme deux racines imaginaires $\frac{1}{a} \sqrt{-1}$ & $-\frac{1}{a} \sqrt{-1}$, étant comparé à la formule $h h - 2 m h \cos V + m m = 0$, donne $m = \frac{1}{a}$, & $\cos V = 0$; d'où l'on tire $\sin V = 1$. Car $\sin V = \sqrt{1 - (\cos V)^2}$; mais

mais la formule $h h - 2 m h \cos. V. + m m = 0$, donne $y = e^{m x \cos. V} a''' \sin. (m x \sin. V + B')$, en regardant a''' comme une constante indéterminée. De plus à cause de $\cos. V = 0$, l'on a $m x \cos. V = 0$, & $e^{m x \cos. V} = e^0 = 1$; donc $y = a''' \sin. \left(\frac{x}{a} + B'\right)$; donc l'intégrale complète cherchée sera $y = a' e^{\frac{x}{a}} + b e^{-\frac{x}{a}} + a''' \sin. \left(\frac{x}{a} + B'\right)$.

EXEMPLE III. Intégrer l'équation $0 = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$. L'équation qui en résulte par les substitutions

$$\text{est } 0 = 1 + a^4 h^4; \text{ d'où l'on tire } 0 = h^4 + \frac{1}{a^4} = \left(h^2 + \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right) \times \left(hh - \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right).$$

En comparant chacun de ces facteurs à la formule $h h - 2 m h \cos. V + m m = 0$, on trouve pour tous les deux $m m = \frac{1}{a a}$, & $m = \frac{1}{a}$. On trouve de plus pour le premier, $-2 m \cos. V = \frac{\sqrt{2}}{a}$; donc $m \cos. V = -\frac{\sqrt{2}}{2a} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$, & pour le second $m \cos. V = \frac{1}{a\sqrt{2}}$, & par conséquent pour tous les deux $m \sin. V = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ *. Donc l'intégrale complète cher-

* Car à cause de $(\sin. V)^2 = 1 - (\cos. V)^2$, on a $(\sin. V)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ & $\sin. V = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\text{chée fera } y = a' e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}}} \sin. \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B' \right) \\ + b' e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \sin. \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B'' \right).$$

EXEMPLE IV. Trouver l'intégrale finie & complète de l'équation différentielle d'un ordre quelconque $0 = \frac{d^n y}{dx^n}$. L'équation qui en résulte par les substitutions est $0 = h^n$, dont toutes les racines sont égales entre elles; en la comparant avec la formule $(h-f)^k = 0$, on trouve $k = n$, & $f = 0$, par conséquent $e^{fx} = e^0 = 1$, & l'intégrale complète sera $y = e^{fx} \times \left(a + bx + cx^2 + \&c. \dots + N' x^{n-1} \right) = \left(a + bx + \&c. \dots + N' x^{n-1} \right)$.

REMARQUE. Supposons qu'on prenne les facteurs $h + 1 = 0$, $h h + h + 1 = 0$, $(h h - h + 1)^2 = 0$, & qu'on fasse leur produit $= 0$, on aura $0 = 1 + h h + h^3 + h^4 + h^5 + h^7$. Substituant dans cette équation y pour $1 = h^0$, $\frac{d dy}{dx^2}$ pour h^2 , &c., on formera l'équation différentielle du septième ordre $0 = y + \frac{d dy}{dx^2} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^7 y}{dx^7}$. On trou-

car puisque $m = \frac{1}{a}$ & que $m \cos. V = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$, on aura $\cos. V = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, & $(\cos. V)^2 = \frac{1}{2}$.

vera l'intégrale complète & finie de cette équation en cherchant les valeurs de y qui répondent à chacun des facteurs qu'on a choisis & en égalant à y la somme de ces valeurs. Le premier facteur $h + 1 = 0$, donnera y

$= a e^{-x}$; le facteur $h h + h + 1 = 0$ donnera y

$= a' e^{-\frac{x}{2}} \sin. \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B' \right)$, le troisième facteur

$(h h - h + 1) = 0$ donne $y = a'' e^{\frac{x}{2}} \sin. \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B'' \right)$

$+ b x e^{\frac{x}{2}} \sin. \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B''' \right)$; donc l'intégrale

complète sera $y = a e^{-x} + a' e^{-\frac{x}{2}} \sin. \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B' \right) +$

$a'' e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B'' \right) + b x e^{\frac{x}{2}} \sin. \left(\frac{x \sqrt{3}}{2} + B''' \right)$.

On peut aussi prendre h , ou h^k pour un des facteurs & comparant h^k avec $(h - f)^k = 0$, on aura $f = 0$ & $y = a + b x + c x^2 + \&c$. S'il n'y a qu'un seul facteur h , la valeur correspondante de y sera $y = a e^{f x} = a e^0 = a$. L'on peut donc, par ce moyen, construire une table générale des différentielles de tous les ordres de la forme H & de leurs intégrales respectives, & cela en prenant des facteurs convenables pour former l'équation K .

195. PROBLEME. L'équation $y = p$ fonction de x étant une intégrale particulière de l'équation $0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C d^2 y}{dx^2}$, dans laquelle dx est constant &

les quantités A, B, C sont des fonctions de x , trouver l'intégrale complète de cette équation. En divisant la proposée par C , & faisant $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = P'$, on aura 0

$$= P y + \frac{P' dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}, \text{ équation que j'appelle (F),}$$

dans laquelle P & P' sont des fonctions de x . Mais, par supposition, $y = p$; donc $dy = dp$ & $ddy = ddp$; donc notre équation sera $Pp + \frac{P' dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = 0$. Supposons

maintenant que $y = pz$ soit une intégrale particulière de l'équation proposée, on aura $dy = p dz + z dp$, $ddy = p d dz + 2 dp dz + z d dp$. Substituant ces valeurs de dy & de ddy dans l'équation F, elle de-

$$\text{viendra } Ppz + \frac{P'z dp}{dx} + \frac{P'p dz}{dx} + \frac{z d dp}{dx^2} + \frac{2dp dz}{dx^2} + \frac{p d dz}{dx^2} = 0, \text{ équation que j'appelle (N). Mais on}$$

vient de trouver $Pp + \frac{P' dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = 0$; ainsi en sup-

primant dans l'équation N le premier, le second & le quatrième termes dont la somme = 0 est multipliée par z ,

$$\text{il viendra } \frac{P'p dz}{dx} + \frac{2dp dz}{dx^2} + \frac{p d dz}{dx^2} = 0. \text{ Multi-}$$

pliant cette équation par $\frac{dx^2}{p dz}$, on aura (A)... $P' dx +$

$$\frac{2 dp}{p} + \frac{d dz}{dz} = 0. \text{ L'intégrale de cette quantité différentielle}$$

$$\text{est } S. P' dx + 2 L.p + L. dz = S. P' dx \times L.e + L. p^2 dz = L.e^{S. P' dx} p^2 dz, \text{ en supposant } L.e = 1.$$

Egalant cette intégrale à une constante arbitraire du

$$\text{même ordre } L. b dx, \text{ on aura } e^{S. P' dx} p^2 dz = b dx, \text{ intégrale complète de l'équation A. De-là on}$$

tire $dz = \frac{bdxe^{-S.P'dx}}{p^2}$, & $z = bS. \frac{e^{-S.P'dx} dx}{p^2}$;

donc $y = pz = bpS. \frac{e^{-S.P'dx} dx}{p^2}$ sera une autre intégrale particulière de l'équation proposée, & en supposant que a' soit une constante arbitraire, on aura $y = a'p + bpS. \frac{e^{-S.P'dx} dx}{p^2}$ pour l'intégrale complète & finie de la proposée.

COROLLAIRE. Si dans l'équation F on a $P = \frac{-P'q - r}{p}$, en supposant que $q = \frac{dp}{dx}$ & $r = \frac{dq}{dx}$, l'équation $y = p$ fonction de x , sera une intégrale particulière de la proposée, dont l'intégrale complète sera $y = a'p + bpS. \frac{e^{-S.P'dx} dx}{pp}$,... (B); car en substituant la valeur de P dont nous venons de parler dans l'équation F, la proposée deviendra (M)..... $-y. \frac{P'q + r}{p} + \frac{P'dy}{dx} + \frac{dd y}{dx^2} = 0$. Mais la supposition de $y = p$ donne $dy = dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dd y}{dx^2} = dq$, $\frac{dd y}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$; donc en substituant ces valeurs de y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dd y}{dx^2}$ dans l'équation M, on aura en ôtant la fraction, $-P'q - r + P'q + r = 0$, équation identique; donc $y = p$ sera une intégrale particulière de la proposée, & l'équation B qui renferme deux constantes arbitraires en sera l'intégrale complète. Si on suppose $p = x^n$; & qu'on substitue dans l'équation M les valeurs de p , q , r que donne cette supposition, elle de-

viendra $\rightarrow y \cdot \left(\frac{m P' x^{m-1} + m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}}{x^m} \right)$

$$+ \frac{P' dy}{dx} + \frac{d dy}{dx^2} = 0, \text{ ou (R) } \dots - m y \cdot \frac{P' x + m - 1}{x x} +$$

$$\frac{P' dy}{dx} + \frac{d dy}{dx^2} = 0, \text{ dont l'intégrale complète sera } y =$$

$$a' x^m + b x^m \cdot S. \frac{e^{-S. P' dx}}{x^{2m}}. \text{ Si on suppose de plus}$$

que $P' = a x^n$, on aura $S. P' dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$; donc no-

tre intégrale complète deviendra $y = a' x^m +$

$$b x^m \cdot S. \frac{e^{-\frac{a x^{n+1}}{n+1}}}{x^{2m}} dx, \text{ équation que j'appelle (T).}$$

On trouvera, par la même méthode, qu'en faisant $p = a x^m + b' x^n + c x^h \&c$, l'intégrale complète & finie

de la proposée sera $y = a' (a x^m + b' x^n + c x^h + \&c.)$

$$+ b (a x^m + b' x^n + c x^h + \&c.) \times$$

$$S. \frac{e^{-S. P' dx}}{(a x^m + b' x^n + c x^h + \&c.)^2}, \text{ } a' \& b \text{ étant des const-}$$

antes arbitraires.

Soit proposée l'équation du second ordre $d dy + a x^2 dy dx - a x y dx^2 = 0$, je lui donne la forme

$$- a y x + \frac{a x^2 dy}{dx} + \frac{d dy}{dx^2} = 0. \text{ En la comparant à la}$$

formule R, je trouve $m = 1$, $P' = a x^2$; donc si à la

place de m & de $a x^n$, on substitue 1 & $a x^2$ dans l'in-

$$\text{tégrale T, on aura } y = a' x + b x S. \frac{e^{-\frac{1}{3} a x^3}}{x^2} dx$$

196. PROBLEME. Trouver l'intégrale complète de l'équation $0 = Py + \frac{P' dx}{dy} + \frac{d dy}{dx^2}$, en la réduisant d'abord au premier ordre. En supposant $y = e^{S. z dx}$, on réduira la proposée à l'équation suivante $0 = P + P'z + zz + \frac{dz}{dx}$, ou $0 = P dx + P'z dx + zz dx + dz$ qui est du premier ordre & ne contient que deux variables x & z , puisque P & P' sont supposés des fonctions de x . On cherchera par les méthodes précédentes, l'intégrale de cette équation. Supposant cette intégrale connue, on aura la valeur de z en x , ou $z = k$ fonction de x . Cela posé on pourra toujours avoir, au moins par approximation, l'intégrale de $z dx$; donc on trouvera l'intégrale $S. k dx$ qui sera $= S. z dx$, fonction de x ; & parce que $y = e^{S. z dx}$, on aura en faisant $e^{S. z dx} = p$, $y = p$ fonction de x , équation qui sera une intégrale particulière de la proposée. Donc on trouvera par le problème précédent l'intégrale finie & complète de la proposée; de sorte que l'on aura $y = a'p + bp S. \frac{e^{-S. P' dx} dx}{p^2}$.

197. PROBLEME. L'intégrale de l'équation de trois termes $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{P du}{dx} + Qu = 0$, équation que j'appelle (A) étant donnée, trouver l'intégrale de l'équation de quatre termes (B).... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{P dy}{dx} + Qy + R = 0$, dx étant constant, P, Q, R étant des fonctions de x & de constantes. Supposons, 1°. que l'équation $u = t$, fonction de x soit l'intégrale de l'équation A, prenez la différentielle dt & divisez-la par dx pour avoir $\frac{dt}{dx} = t'$, autre fonction de x . 2°. Cherchez, par la méthode ci-dessus (128), l'intégrale de l'équation $dt - \frac{t Q t dx}{t'} - \frac{R t dx}{t'} = 0$, dans laquelle

$\frac{Qz}{z}, \frac{Rz}{z}$ sont des fonctions de x qu'on est censé connoître;

& supposant que cette intégrale est $r = m$, fonction de x , prenez la différentielle de m , & divisez-la par dx pour avoir $\frac{dm}{dx} = n$, autre fonction de x . 3°. Cherchez (par

le N°. 128) l'intégrale de l'équation $dz - \frac{zr'}{z} -$

$n dx = 0$, & supposant que cette intégrale soit $z = k$, fonction de x , on aura $y = m - k$ pour l'intégrale de l'équation B. En effet si l'on suppose $dy + Tz dx = 0$, T & z étant deux variables, on aura $dy = -Tz dx$ & $dd y = -T dz dx - z dT dx$; donc l'équation B devien-

dra par substitution, $-\frac{T dz}{dx} - \frac{z dT}{dx} - z P T +$

$Qy + R = 0$, & en multipliant par $\frac{dx}{T}$, changeant les signes & ajoutant l'équation $dy + z T dx = 0$, on aura

l'équation (H) $\dots dy + dz + \left(z T + z P + \frac{z dT}{T dx} - \frac{Qy}{T} \right) dx - \frac{R dx}{T} = 0$: cette équation H seroit in-

tégrable si on pouvoit lui donner la forme (M) $\dots dy + dz + (y + z) V dx - \frac{R dx}{T} = 0$, supposé que V & T soient des fonctions connues de x : car en faisant $r = y + z$, on auroit $dr = dy + dz$, & l'équation M deviendrait $dr + r V dx - \frac{R dx}{T} = 0$, dont on trouve-

roit l'intégrale $r = m$, fonction connue de x (par le N°. 128); & en différenciant, on auroit $dr = dy + dz = dm = n dx$; donc $dy = n dx - dz$, n étant une fonction connue de x . Substituant cette valeur de dy dans l'équation $dy + z T dx = 0$, on auroit en changeant les signes, $dz - z T dx - n dx = 0$, dont on trouveroit l'intégrale $z = k$, fonction connue de x (par le N°. 128). Mais on a $r = y + z$; donc $y = r - z$; donc en substi-

tuant les valeurs de r & de z , on aura $y = m - k$, intégrale cherchée de l'équation (B). Il ne s'agit donc plus que de réduire l'équation (H) à la forme M; ce

qu'on fera en supposant $\left(T + P + \frac{dT}{T dx} \right) z - \frac{Qy}{T} =$
 $V(z + y)$, ou (N).... $T + P + \frac{dT}{T dx} = - \frac{Q}{T}$, équation d'où l'on tire, en ôtant les fractions & transpo-

sant, $Q dx + T^2 dx + P T dx + dT = 0$. Si on suppose maintenant $u = e^{S.t'' dx}$, t'' étant une nouvelle varia-

ble, & $L.e = t$, on aura, en supposant toujours dx cons-

tant, $du = e^{S.t'' dx} t'' dx$, $ddu = e^{S.t'' dx} dt'' dx +$
 $e^{S.t'' dx} t'' t'' dx^2$. Donc en substituant, l'équation A

deviendra $e^{S.t'' dx} \frac{dt''}{dx} + e^{S.t'' dx} t'' t'' + P e^{S.t'' dx} t''$
 $+ Q e^{S.t'' dx} = 0$. Si l'on multiplie cette équation par

dx , qu'on la divise par $e^{S.t'' dx}$ & qu'on fasse t''
 $= T$, on aura l'équation $Q dx + T^2 dx + P T dx +$
 $dT = 0$, que nous avons trouvée ci-dessus; donc la va-

leur de T que donnera cette équation peut être substi-

tuée à la place de t'' dans l'équation $u = e^{S.t'' dx}$;

c'est-à-dire, qu'on peut regarder t'' & T comme repré-

sentant la même fonction de x .

Pour avoir la valeur de T , je remarque qu'on a les

équations $T = t''$, $u = t$, $u = e^{S.t'' dx}$; donc $t =$
 $e^{S.t'' dx}$, $L.t = L.e^{S.t'' dx} = S.t'' dx \times L.e = S.t'' dx$,

& en différentiant, $\frac{dt}{t} = t'' dx = T dx$. Mais on sup-

pose ici $dt = t' dx$; donc $\frac{t' dx}{t} = T dx$, ou $T =$

$\frac{t'}{t}$, fonction connue de x , & puisque $V = -\frac{Q}{T}$ (ce qu'on tire aisément de l'équation N), on aura $V = -\frac{Q}{T}$, fonction connue de x ; donc l'équation $dr + rVdx - \frac{Rdx}{T} = 0$, deviendra $dr - \frac{rQtdx}{t'} - \frac{Rtdx}{t'} = 0$,

comme nous l'avons mise dans la solution, & son intégrale sera $r = m$, fonction connue de x ; donc l'intégrale de l'équation B sera $y = m - k$.

COROLLAIRE. Donc pour intégrer l'équation B, on n'a qu'à retrancher le terme R & substituer u pour y , du pour dy & ddu pour ddy pour avoir l'équation $\frac{ddu}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0$. On cherchera l'intégrale de cette équation par les méthodes précédentes, ensuite on trouvera l'intégrale de l'équation B par le présent problème.

198. PROBLÈME. Une intégrale particulière de l'équation différentielle de trois termes $Au + \frac{Bdu}{dx} + \frac{Cddu}{dx^2} = 0$, étant donnée, trouver l'intégrale complète de l'équation de quatre termes $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = K$, ou de l'équation $D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = 0$, en faisant $K = D$, dx étant constant, & A, B, C, D des fonctions de x . Divisez les équations proposées par C pour leur donner les formes (A)... $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$, & (B)... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$. Maintenant l'intégrale particulière de l'équation A étant supposée $u = mt$, fonction de x , cherchez (par le N°. 195), une autre intégrale particulière de la même équation qui sera

$u = n$, fonction de x . Cherchez ensuite par le problème précédent les deux intégrales particulières correspondantes de l'équation B, & supposant que ces intégrales soient représentées par $y = p$ & $y = q$, p & q étant des fonctions de x ; l'intégrale complète de l'équation B sera $y = ap + bq$, a & b étant des constantes arbitraires: car puisque $y = p$ & $y = q$, $y = ap$, & $y = bq$ seront des intégrales particulières de l'équation B, & $y = ap + bq$ en sera l'intégrale complète, ce qu'on prouvera par la méthode ci-dessus (194.).

REMARQUE. On voit, par les deux problèmes précédents, que si l'on a une équation à trois termes de la forme A, dont l'intégrale soit donnée, on pourra toujours trouver l'intégrale de l'équation B de quatre termes, c'est-à-dire que si l'on suppose $R = 0$, & qu'on

trouve l'intégrale de $\frac{dd y}{dx^2} + \frac{P dy}{dx} + Qy + R = 0$, on

trouvera aussi l'intégrale en supposant R une fonction de x . Cette méthode seroit applicable aux équations du 3^e, 4^e, &c. ordre. Et en général si l'on a l'équation

$$Ay + \frac{B}{dx} + \frac{C dd y}{dx^2} \&c. \dots + \frac{M d^m y}{dx^m} = \pm R,$$

dx étant constant & les quantités A, B, C, . . . M, R étant des fonctions de x , si on trouve l'intégrale d'un ordre quelconque de cette équation en supposant $R = 0$, on pourra trouver l'intégrale du même ordre en supposant que R est une fonction de x .

Ils ne sera pas inutile de faire observer qu'on peut souvent intégrer facilement une équation donnée en l'élevant à un ordre supérieur. Ainsi en différenciant l'équation (A).... $8 dx^2 + 2 y ddy - dy^2 + 4 y dx^2 = 0$, on aura (B).... $d^3 y - 4 dy dx^2 = 0$, équation dont une intégrale particulière sera $y = e^{f x}$. En faisant $f = 0$, on a $y = e^0 = 1$; les équations $y = 2 e^{2 x}$, $y = -2 e^{-2 x}$, seront encore des intégrales particulières de la même équation. Multipliant e^0 par a , $2 e^{2 x}$ par

$\frac{b}{2}$, $- 2e^{-2x}$ par $-\frac{f}{2}$, on aura $y = a + be^{2x}$

$+ ce^{-2x}$ pour l'intégrale finie & complète de l'équation B, a , b & c , étant trois constantes arbitraires. Cette intégrale contient l'intégrale de l'équation (A) qui est d'un ordre moins élevé, comme un cas particulier : car l'intégrale de l'équation A ne peut contenir que deux constantes arbitraires. Si on différencie donc notre intégrale deux fois & qu'on substitue dans l'équation A les valeurs de y , dy & ddy , il faudra que le résultat satisfasse à l'équation A, ce qu'on obtiendra en comparant les constantes; ainsi dans le cas présent on

trouvera $c = \frac{aa-2}{4b}$, & l'intégrale complète de l'équa-

tion A sera $y = a + be^{2x} + \frac{aa-2}{4b} \cdot e^{-2x}$. On

pourra aussi en différenciant une équation donnée, une, deux, &c. fois, parvenir souvent à une équation d'un ordre supérieur de la forme de celles que nous avons déjà intégrées, & on aura par là l'intégrale cherchée.

DE QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRER CERTAINES ÉQUATIONS.

199. Soit une équation formée de tant de termes qu'on voudra de cette forme $ay^n dy^m ddy^p dx^q$ dans lesquels a , n , m , p , q sont constans, & $m + 2p + q$ constant; je dis que si $n + m + p$ est aussi constant, l'équation sera intégrable : on suppose $m + 2p + q$ constant afin que les quantités infiniment petites soient du même ordre. Maintenant si $n + m + p$ est constant, on

aura, en faisant $y = e^{S \cdot t dx}$, une équation d'où les exponentielles disparaîtront, & qui, ne contenant que t , dt & dx , pourra s'intégrer par les méthodes connues (on suppose dx constant. Cette méthode est du célèbre M. d'Alembert.

Soit l'équation du premier ordre & dont parle M. le Marquis de Condorcet dans le quatrième volume des Mémoires de l'Académie de Turin, $4x^3 dy - 2x^2 y dy - 2x^2 y dx + xy^2 dx + xy^2 dy - 2y^3 dx - x^2 dx - x^2 dy + 3xy dx + xy dy - 2yy dx = 0$. Si on le met sous cette forme $A dx + B dy = 0$, on trouvera qu'en la multipliant par un facteur $M =$

$\frac{1}{\sqrt{(x-y).xxyy + xx y - x^3}}$, elle devient intégrable: car alors $\frac{(d. A M)}{dy} = \frac{(d. B M)}{dx}$, & l'intégrale cherchée est $= L. [y - \sqrt{(x-y)}] - L. [y + \sqrt{(x-y)}] - \frac{\sqrt{(x-y)}}{x} = C.$

Soit l'équation $2ayddy - 4ady^2 - y^3 dx^2 (1+xx)^{-\frac{3}{2}} = 0$. Je la multiplie par le facteur $M = \frac{1}{y^3}$ pour avoir

$$\frac{2ayddy - 4ady^2}{y^3} - \frac{dx^2}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ dont l'inté-}$$

grale en ajoutant la constante $A dx$, est $\frac{2a dy}{yy} -$

$$\frac{xdx}{\sqrt{(1+xx)}} = A dx; \text{ \& en intégrant de nouveau, on}$$

$$\text{aura } -\frac{2a}{y} - \sqrt{(1+xx)} = Ax + B.$$

200. Soit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} \dots (A),$

je fais disparaître les fractions pour avoir $dx \sqrt{(1-yy)} = dy \sqrt{(1-xx)}$, & en intégrant par parties, il

$$\text{vient } x \sqrt{(1-yy)} + S. \frac{xy dy}{\sqrt{(1-yy)}} = y \sqrt{(1-xx)} +$$

S. $\frac{y x dx}{\sqrt{(1 - x x)}} + C$ *. Mais l'équation A. étant multipliée par $x y$ & ensuite intégrée, donne S. $\frac{x y dx}{\sqrt{(1 - x x)}} =$

S. $\frac{x y dy}{\sqrt{(1 - y y)}}$; donc l'équation précédente, en effaçant les quantités égales qui se trouvent dans les deux membres, deviendra $x \sqrt{(1 - y y)} = y \sqrt{(1 - x x)} + C$; équation algébrique qui donne l'intégrale complète de la proposée.

Si l'on avoit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a + b x + c x x)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a + b y + c y y)}} \dots (B)$, en ôtant les fractions

& prenant ensuite l'intégrale par parties, on trouveroit $x \sqrt{(a + b y + c y y)} - S. \frac{(b + 2 c y) x dy}{2 \sqrt{(a + b y + c y y)}} =$

$y \sqrt{(a + b x + c x x)} - S. \frac{(b + 2 c x) y dx}{2 \sqrt{(a + b x + c x x)}} + C \dots (H)$. Si l'on multiplie l'équation B par $x y$,

on aura en intégrant, S. $\frac{x y dx}{\sqrt{(a + b x + c x x)}} =$

S. $\frac{x y dy}{\sqrt{(a + b y + c y y)}}$. Mais si, avant d'intégrer on

multiplie par y , on trouvera S. $\frac{y dx}{\sqrt{(a + b x + c x x)}} =$

* Si l'on fait attention que $S. p dx = p x - S. x dp$ (voyez le n°. 79), on verra facilement que $S. dx. \sqrt{(1 - y y)} = x \sqrt{(1 - y y)} + S. \frac{x y dy}{\sqrt{(1 - y y)}}$.

$$S. \frac{y dy}{\sqrt{(a + by + cyy)}} = \frac{1}{c} \sqrt{(a + by + cyy)}$$

$$- \frac{b}{2c} S. \frac{dy}{\sqrt{(a + by + cyy)}}, \text{ comme il est aisé de}$$

$$\text{le voir en différenciant. De même } S. \frac{x dx}{\sqrt{(a + bx + cxx)}}$$

$$= S. \frac{x dx}{\sqrt{(a + bx + cxx)}} = \frac{1}{c} \sqrt{(a + bx + cxx)}$$

$$- \frac{b}{2c} S. \frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cxx)}}; \text{ donc faisant ces substi-}$$

tutions dans l'équation H, effaçant ce qui se détruit, on aura cette équation algébrique $x \sqrt{(a + by + cyy)}$

$$- \frac{b}{2c} \sqrt{(a + bx + cxx)} = y \sqrt{(a + bx + cxx)}$$

$$- \frac{b}{2c} \sqrt{(a + by + cyy)} + C, \text{ ou bien } \left(x + \frac{b}{2c}\right) \times$$

$$\sqrt{(a + by + cyy)} = \left(y + \frac{b}{2c}\right) \sqrt{(a + bx + cxx)} + C,$$

qui est l'intégrale de l'équation proposée. Il est bon de faire attention à cette méthode ingénieuse que nous devons au célèbre M. de La Grange.

$$\text{L'équation } \frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cxx + exxx + fxx)}} =$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}} \text{ dont aucun des mem-}$$

bres n'est intégrable algébriquement a néanmoins une intégrale algébrique exprimée en général par l'équation

$$A + B(x + y) + C(xx + yy) + Dxy + E(xxy + xyy) + Fxxx = 0. \text{ En effet si on différencie cette}$$

$$\text{équation, il vient } [B + 2Cx + Dy + E(2xy + yy)$$

$$+ 2Fxy] dx + [B + 2Cy + Dx + E(2yx + yy)$$

$+ 2 F y x x] dy = 0$; mais en tirant de la même équation la valeur de x en y , & ensuite celle de y en x , on trouvera $2 x (C + E y + F y y) + B + D y + E y y = \sqrt{[(B + D y + E y y)^2 - 4 (A + B y + C y y) x (C + E y + F y y)]}$. Et de même $2 y (C + E x + F x x) + B + D x + E x x = \sqrt{[(B + D x + E x x)^2 - 4 (A + B x + C x x) (C + E x + F x x)]}$; de sorte qu'en faisant $a = BB - 4AC$; $b = 2BD - 4(AE + BC)$; $c = 2BE + DD - 4(AF + CC + BE)$; $e = 2DE - 4(BF + CE)$; $f = EE - 4CF$, on aura $dx \sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)} = dy \sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}$; & par conséquent

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)}}{\sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}}, \text{ qui est l'équation proposée.}$$

Mais par ce que les coefficients donnés a, b, c, e, f ne sont qu'au nombre de cinq, & que les quantités A, B, C, D, E, F sont au nombre de six, il est évident qu'il en restera une indéterminée qui tiendra lieu de la constante arbitraire qui doit se trouver dans l'intégrale complète de l'équation proposée. Nous allons maintenant donner une méthode directe pour intégrer les équations qui ont la forme de celles dont on vient de parler, elle est fondée sur le principe suivant.

PRINCIPE. Quand on a une équation du premier ordre dont on ne peut trouver l'intégrale, il faut la différencier & examiner si en combinant cette nouvelle équation avec la proposée, on pourroit trouver une équation intégrale du premier degré
autre

autre que la proposée; car alors en chassant, par le moyen de ces deux équations les premières différences, on aura l'intégrale cherchée. Si l'intégration ne réussit pas de cette manière, on passera à la différentielle du troisième degré & l'on cherchera si l'on peut parvenir à une nouvelle équation du second degré; en ce cas il n'y aura plus qu'à éliminer les différences secondes & troisièmes par le moyen de l'équation proposée & de sa différentielle, & ainsi de suite.

Reprenons l'équation $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2}}$, je fais l'un & l'autre membre $= dt$, & je quarre, il vient $dt^2 = \frac{dx^2}{a+bx+cx^2}$, $dt^2 = \frac{dy^2}{a+by+cy^2}$; donc $\frac{dx^2}{dt^2} = a+bx+cx^2$, & $\frac{dy^2}{dt^2} = a+by+cy^2$. Je différencie maintenant ces équations en supposant dt constant, & divisant la première par dx & la seconde par dy , il viendra $\frac{2dx}{dt^2} = b+2cx$; $\frac{2dy}{dt^2} = b+2cy$. Ajoutant ces deux équations ensemble & faisant $x+y=p$, on aura l'équation $\frac{2ddp}{dt^2} = 2b+2cp$, laquelle étant multipliée par dp & ensuite intégrée, donne $\frac{dp^2}{dt^2} = C+2bp+cp^2$; d'où l'on tire $\frac{dp}{dt} = \sqrt{C+2bp+cp^2}$. Mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{a+bx+cx^2} + \sqrt{a+by+cy^2}$.

Donc on aura enfin $\sqrt{a+bx+cx^2} + \sqrt{a+by+cy^2}$

+ 2 F y x x

tion la vale

trouvera.

✓ [

(C

y) + c(x + y)²

équation proposée

de celle q

métho

+ c

$$\frac{dx}{y^2 + f y^4}, \text{ je fais } \frac{dz}{t}$$

$$\frac{dx}{a x + c x x + e x^3 + f x^4}, \& \frac{dz}{t} =$$

✓ (a + b y + c y y + e y³ + f y⁴). Quarrant ces équations, multipliant ensuite par le dénominateur du second membre & divisant par $\frac{dz^2}{t^2}$, différenciant en

regardant dz comme constant, divisant la première par dx & la seconde par dy, & transposant, l'on

$$\text{aura } \frac{2 t d t d x + 2 t t d d x}{d z^2} = b + 2 c x + 3 e x^2 + 4 f x^3;$$

$$\frac{2 t d t d y + 2 t t d d y}{d z^2} = b + 2 c y + 3 e y^2 + 4 f y^3. \text{ J'ajoute}$$

ensemble ces deux dernières équations, & je fais x + y = p, x - y = q, & dt = M dp + N dq, j'aurai en di-

$$\text{visant par 2, } \frac{t M d p^2 + t N d p d q + t t d d p}{d z^2} = b + c p +$$

$$\frac{3 e}{4} (p p + q q) + \frac{f}{2} (p^3 + 3 p q^2), \& \text{ mettant}$$

$$\text{au lieu de } \frac{d p d q}{d z^2} \text{ sa valeur } \frac{d x^2 - d y^2}{d z^2} =$$

$$\frac{a + b x + c x x + e x^3 + f x^4}{x^2} = \frac{a + b y + c y y + e y^3 + f y^4}{y^2}$$

C A I

$$bq + cpq +$$

, après

ur

$$p)(t - Nq,$$

$$+ \frac{f}{2} [t(p^3 + 3pq^2) -$$

posons maintenant que t soit = $= 0$, & $N = P$, fonction de p seule. $Pdq + qdP$. Mais $dz = Mdp + N$.

I E.

donc $qdP = Mdp$, & $M = \frac{q \cdot dP}{dp}$. Donc

$$\text{deviendra } \frac{PPq^3(dPdp + Pddp)}{dz^2} = Pq^3 \left(\frac{e}{2} + \right.$$

$$\text{ou en divisant par } Pq^3, \frac{Pdp dP + PPddp}{dz^2} = \frac{e}{2} + \dots$$

Si l'on multiplie cette équation par zdp , elle deviendra intégrable, & son intégrale sera à cause de dz constant, sera, dis-je, $\frac{PPdp^2}{dz^2} = C + ep + fp^2$;

$$\text{donc } \frac{Pdp}{dz} = \sqrt{C + ep + fp^2}; \text{ mais } \frac{dp}{dz} =$$

$$\frac{dx + dy}{dz} = \frac{\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)} + \sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}}{t};$$

Donc substituant

cette valeur, mettant à la place de p , $x + y$, & à la place de t , Pq , ou bien $P(x - y)$, on aura, après avoir multiplié par $x - y$, l'équation $\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)} + \sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)} =$

$(x-y) \cdot \sqrt{[C + e(x+y) + f(x+y)^2]}$, qui est l'intégrale cherchée. Si l'équation proposée étoit

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}} = 0, \text{ on n'auroit}$$

qu'à changer dans l'intégrale qu'on vient de trouver, le signe du radical $\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}$.

Les intégrales S. $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$,

S. $\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}$ n'appartiennent ni aux logarithmes, ni aux arcs de cercle; & on doit les rapporter à un genre de transcendentes entièrement inconnu.

On doit donc conclure de ce qui précède qu'il peut très-souvent arriver qu'une équation séparée dont aucun des membres n'est intégrale algébriquement, ni par les logarithmes, ni par les arcs de cercle, ait cependant une intégrale algébrique. Nous reprendrons cette matière importante dans la seconde partie de cette section.

FIN DU TOME IV.

T A B L E

D E S M A T I E R E S

Contenues dans ce Volume.

S E C O N D E P A R T I E.

C A L C U L I N T É G R A L :

S E C T I O N I I.	Page	1
<i>Des Usages du Calcul Intégral dans la Géométrie ,</i>		Ibid.
<i>De la Rectification des Courbes ,</i>		61
<i>De la Cubature des Solides & de la Quadrature de leur surface ,</i>		79
<i>Du Centre de Grandeur , ou du Centre de Gravité des Figures ,</i>		102
<i>De la Méthode Inverse des Tangentes ,</i>		131
<i>Application du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral aux Courbes à double Courbure ,</i>		149



SECTION III.

*De l'Intégration des Formules Différentielles ,
& des Équations Différentielles.*

**PREMIERE PARTIE DE LA TROISIEME
SECTION. Page 159**

<i>De l'Intégration par les Séries ,</i>	173
<i>Usage des Quadratures & des Rectifications des Courbes dans le Calcul Intégral ,</i>	178
<i>Ramener dans certains cas l'Intégration d'une Formule Différentielle à celle d'une autre Formule Différentielle plus simple ,</i>	194
<i>Des Formules Différentielles dont l'Intégrale dépend du Cercle ,</i>	199
<i>Des Quantités imaginaires ,</i>	201
<i>De l'Intégration des Formules Logarithmiques ,</i>	212
<i>Des Formules qui renferment la différence d'un Arc Circulaire , ou du Logarithme hiperbolique simple , multipliée ou divisée par des Sinus & des Co-sinus ,</i>	222
<i>De l'Intégration des Fractions Rationnelles ,</i>	239
<i>Des Formules Différentielles dont l'Intégrale dépend de la Rectification de l'Ellipse ou de l'Hiperbole , séparé- ment ou ensemble ,</i>	260
<i>De l'Intégration des Formules Différentielles de tous les Ordres , & de celles qui sont affectées de Signes d'In- tégration , en supposant qu'il n'y ait qu'une Variable dans chaque Différentielle , ou s'il y a deux Diffé- rentielles dans la même Formule que l'une des deux soit Constante ,</i>	269

TABLE DES MATIERES. 503

<i>De l'Intégration des Différentielles à plusieurs Variables,</i>	Page	280
<i>De ce qu'on peut faire lorsqu'il y a trop de difficulté pour trouver le facteur qui doit rendre complète une Équa- tion Différentielle ,</i>		322
<i>De la Méthode de M. Newton d'intégrer par les Séries les Équations Différentielles qui contiennent plusieurs Va- riables dans leurs termes , avec les Différences de ces Variables élevées à des Puissances quelconques ,</i>		324
<i>De la séparation des Variables dans les Équations Diffé- rentielles ,</i>		335
<i>De la demi-Séparation des Indéterminées & de quelques autres Méthodes de Calcul Intégral ,</i>		363
<i>Des Intégrales particulières des Équations Différentielles ,</i>		385
<i>De la Construction Géométrique des Équations Différen- tielles ,</i>		392
<i>De l'Intégration des Différentielles des Ordres Supérieurs ,</i>		394
<i>De quelques Méthodes pour^o intégrer ou pour réduire aux Ordres Inférieurs les équations Différentielles des Ordres Supérieurs , lorsqu'elles ont certaines Con- ditions ,</i>		438
<i>De quelques Méthodes d'intégrer certaines Équations ,</i>		492

Fin de la Table du Tome IV.

DE L'IMPRIMERIE

De la Veuve BALLARD, rue des Mathurins, 1774.

UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06531 7714

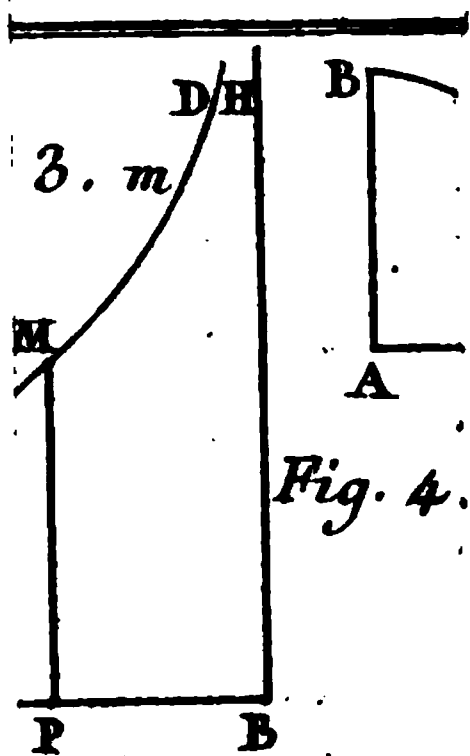


Fig. 4.

